n.V.

~~407~~ E26
OS 738 n.v.

Zur königlichen Landwirth-
schaft und Gewerbschule

W3

97

Lehrbuch

des

Aufnehmens mit dem Meßtische,

zunächst

für Preußens Militair-Unterrichts-Anstalten,

überhaupt aber für

Officiere, Feldmesser, Forstbediente und Bergleute;

und

Anleitung zur Lösung trigonometrischer Aufgaben

ohne logarithmisch-trigonometrische-Tafeln.

Von

Friedrich Wilhelm Netto,

Doctor der Philosophie, Lehrer an der Königlichen allgemeinen Kriegsschule und dem Königlichen Cadettencorps zu Berlin.

Mit 4 Kupfertafeln.

Berlin.

Im Verlage von Duncker und Humblot.

1822.

K. Rectorat d. Realschule Straubing

134307 02X

Staatl. Bibliothek Passau

Vorrede.

Der ungemeine Beifall, mit welchem der erste Theil meiner Vermessungskunde aufgenommen, und der gegen mich so oft und vielfach geäußerte Wunsch, die Behandlung des Meßtisches für sich allein zu bearbeiten, waren die Ursachen der Entstehung des gegenwärtigen Werkchens, dem ich eben so nachsichtsvolle Beurtheiler als aufmerksame Leser wünsche.

Gleichzeitig mit der Beendigung des Drucks erschien die Instruction für die topographischen Arbeiten des Königlich-Preußischen Generalstabes, in welcher der zweite Theil (die Instruction für die Detail-Aufnahmen) nachfolgenden Gang bei diesen Arbeiten vorschreibt, welchen ich, weil gegenwärtiges Werk zu-

nächst für den Unterricht in den Preußischen Militair-Bildungs-Anstalten bestimmt ist, den Lesern dem Sinne nach mittheile. Nemlich:

Nach geschehener Bespannung des Meßtischblattes und nachdem die erhaltenen trigonometrischen Hauptpunkte vermittelst des Durchstechens aufgetragen sind, soll der Meßtisch in seiner wahren Lage zur Oberfläche der Erde aufgestellt und die Richtungslinie der einspielenden Magnetnadel auf dem Blatte bemerkt werden.

Wenn es nicht möglich ist, sich im Mittelpunkte des gegebenen trigonometrischen Hauptpunkts aufzustellen, so soll der Abstand des Meßtisches vom Mittelpunkte des trigonometrischen Punktes gemessen und nach geometrischen Sätzen das Bild des Aufstellungspunktes auf dem Ueberzuge des Meßtischblattes bestimmt werden. Dies alles fällt aber weg, wenn der gemessene Abstand so klein ist, daß man seine Verjüngung nicht mehr von dem, für die Aufnahme vorgeschriebenen Maaßstabe abnehmen kann.

Würde diese Vorschrift nicht befolgt werden, so würden beim fortgesetzten Verfahren sich Verschiebungen erzeugen, welche nach Umständen mehr oder minder bedeutend werden.

Aus den gegebenen trigonometrischen Hauptpunk-

ten soll auf folgende vier Arten die Bestimmung anderer Punkte geschehen.

1., Durch Schneiden (also nach den, Seite 129 in der 4ten Aufgabe und Seite 133 in der 7ten Aufgabe gelehrten Methoden); entweder aus den auf dem Blatte gegebenen trigonometrischen oder bereits geometrisch bestimmten Punkten. *)

2., Wenn drei Punkte bekannt sind, durch das Rückwärtseinschneiden, also nach der im 3ten Abschnitte von Seite 160 bis 176 vorgetragenen Lehmannischen Annäherungs Methode.

3., Durch Rückwärtseinschneiden aus zwei Punkten, nachdem zuvor der Meßtisch mittelst der Magnetnadel sehr genau orientirt worden ist, wenn es unmöglich ist, drei Punkte zu sehen.

4., Wenn in einzelnen Gegenden Mangel an Aussicht die Anwendung der ersteren 3 Arten hindert, so soll zum wirklichen Messen mit der Kette, oder zum

---

*) Hierbei können auch die, Seite 136 bis 143 vorgetragene 9te 10te und 11te Aufgabe angewendet werden, die auch im Wesentlichen auf das Schneiden der Punkte gegründet sind. Allemal geben die auf dem Blatte gegebenen Entfernungen zweier trigonometrisch oder geometrisch bestimmten Punkte die auf dem Felde bei Auflösung einer solchen Aufgabe zu wählende Standlinie an.

Abschreiten, wenn der Aufnehmende das Verhältniß eines Schrittes zur Ruthe kennt, geschritten werden.

Zur Abkürzung der Arbeit soll es, wenn es nicht zu vermeiden ist, mittelst Hülfe der Magnetnadel bewerkstelliget werden. *)

Der Meßtisch soll als das einfachste und kürzeste Mittel überall gebraucht werden; dem ungeachtet soll im Regenwetter der Gebrauch anderer Meßwerkzeuge nicht ausgeschlossen sein, wenn, um Irrthümer zu vermeiden, die dazu nöthige vermehrte Aufmerksamkeit angewendet wird.

Zur Schonung der Original-Aufnahmen, und damit das Papier nicht durch die Lineale beschmutzt wird, soll über jeden Meßtisch-Ueberzug eine Papierdecke, aus mehreren Stücken bestehend, da fest verklebt bleiben, wo nicht gearbeitet wird. Da, wo diese Decke Punkte bedeckt, welche zur Bestimmung anderer gebraucht werden, sollen kleine Löcher eingeschnitten und diese wiederum mit durchsichtigem Lepirpapier verklebt werden.

---

*) Das Verhältniß des Schrittes zur Ruthe würde daher jeder Aufnehmende nach dem, Seite 69 angegebenen Verfahren aufzusuchen, und nach Seite 70 daraus den Schrittmaaßstab zu proportioniren haben.

Alles wird nach den Vorschriften der Musterblätter *) in Farben, täglich nach vollendeter Aufnahme, auf dem Ueberzuge des Meßtischs ausgezeichnet.

Die Aufnahme und Bezeichnung der Berge geschiehet nach der allbekannten Lehmannischen Theorie nur mit dem Unterschiede, daß der Lehmannischen Tinten-Leiter, hier, zur Erleichterung beim Zeichnen und Lesen und zur Gewinnung der Zeit, außer dem vorgeschriebenen Verhältniß von schwarz und weiß, jedem der neun verschiedenen Neigungswinkel ein besonderes conventionelles Zeichen beigegeben ist.

Die Horizontalen sollen durchs Visiren über die Fläche des horizontal gestellten Meßtischs auf dem Terrain ausgemittelt werden.

Wenn in einer schiefen Fläche sich der Neigungswinkel in kurzen Abständen so oft um wenige Grade ändert, daß der Maaßstaab der Aufnahme nicht erlaubt, es auszudrücken, so sollen die wellenförmigen Neigungslinien als gerade Linien unter Bezeichnung des mittleren Neigungswinkels eingetragen werden.

---

*) Erläuterungen für die topographischen Arbeiten des Königlich Preußischen General-Stabs. Berlin 1818.

Die Scala selbst könnte ich zwar hier mit Worten erläutern und ihre Anfertigung lehren, da ich aber nicht weiß: ob dies mir gestattet sein dürfte, so zeige ich blos den Lehrern an den preußischen Militair-Bildungs-Anstalten an, daß solche bei mir nebst mehreren Vorlegblättern zum Unterrichte in kurzem in Kupfer gestochen zu haben sein wird.

So viel über das, was ich mir von dieser Instruction, als rein wissenschaftlicher, in keiner andern Beziehung stehender Gegenstand, zum nützlichen Gebrauche dieses für den Unterricht in Preußens Militair-Bildungs-Anstalten bestimmten Werks mit anderen Worten erlauben durfte, damit in diesen Anstalten gleich Anfangs beim Unterrichte auf eine strenge Ausübung jener wahrhaft weisen Vorschriften gehalten, und so Einheit und Genauigkeit erreicht werde.

Der Verfasser.

Inhalt.

Seite

Erster Abschnitt.

Von den Maaßen 1

Zweiter Abschnitt.

Beschreibung des Meßtisches und der zu demselben nöthigen Werkzeuge 6

Der Meßtisch 6

1. Die Einlothzange 12
2. Die Libelle oder Wasserwage 13
3. Die Orientir-Boussole 20
4. Das Diopter-Lineal 25
5. Die Kippregel 32
6. Das Diopter-Fernrohr oder Perspectiv-Lineal . . . 33

Construction und Leistungen der Fernröhre 34

Schmalkalters Höhenmesser 38

Die Transversal-Maaßstäbe 41

Der Stangenzirkel 49

Dritter Abschnitt.

Von der Wahl, dem Abstecken und Messen der Standlinie 54

Vierter Abschnitt.

Das Messen der Winkel mittelst des Meßtisches 74

Sehnentafel 77

Genauere Winkelmessung durch Repetition 112

Seite

Fünfter Abschnitt.

Gebrauch des Meßtisches zur Bestimmung unzugänglicher Weiten, zur Absteckung von Parallelen, zur Aufnahme von Grundstücken und zur Entwerfung des geometrischen Netzes einer aufzunehmenden Gegend 116

Methoden des Aufnehmens 116

Sechster Abschnitt.

Vom Rückwärtseinschneiden 148

Siebenter Abschnitt.

Das Aufnehmen der Berge. Das Aufnehmen größerer Erdstrecken, wobei mehrere Meßtischblätter an einander stoßende Sectionen bilden. Verbesserungen des Meßtisches und des Perspectiv-Lineals 181

Aufnahme der Berge 181

Aufnahme größerer Erdstrecken, wobei mehrere Meßtischblätter an einander stoßende Sectionen bilden 185

Neuere Methode, die Berghorizontalen bei Aufnahme der Berge in der Zeichnung zu bestimmen, ohne dieselben vorher auf dem Terrain abzustecken 193

Verbesserungen des Meßtisches und des Diopter-Fernrohrs. 195

Anhang.

Anleitung zur Auflösung trigonometrischer Aufgaben ohne Anwendung der Logarithmen und der trigonometrischen Hülfslinien 197

Seiner Majestät

dem

Kaiser und Selbstherrscher aller Reußen,

Alexander dem Ersten,

dem

erhabenen Beförderer und Beschützer der Wissenschaften und Künste,

in tiefster Ehrfurcht

allerunterthänigst zugeeignet

von

dem Verfasser.

Erster Abschnitt.

Von den Maaßen.

Wir können uns von der Ausdehnung einer Linie, der Größe einer Fläche ꝛc. nur dadurch einen deutlichen Begriff verschaffen, daß wir sie mit bekannten, als Einheiten ihrer Gattung angenommenen, Linien, Flächen ꝛc. vergleichen und untersuchen, wie oft jene Einheit in der betreffenden Größe oder wie oft letztere in jener enthalten sei. Dergleichen Einheiten nennt man Maaße, im Allgemeinen, und Längenmaaße, Flächenmaaße ꝛc., je nachdem sie zur Bestimmung der Linien oder Flächen ꝛc. dienen.

Die Natur hat uns keine feststehende Maaß-Einheit dargeboten, man mußte willkührliche Einheiten annehmen und wählte gewöhnlich hiezu vom menschlichen Körper entlehnte Längen, welche mithin höchst ungewiß sein mußten; daher die Verschiedenheit der Längenmaaße in allen Ländern, fast in allen Provinzen; daher die Ungewißheit, welche über die von den Alten angegebenen Maaße herrscht. — Die französische Revolution, welche außer ihren Gräueln auch anderseits, durch den Anstoß, welche sie den Geistern gab, viel Erfreuliches auf dem Felde des Wissens erzeugte, hat uns auch im vorliegenden Falle bereichert, indem, durch das Bedürfniß geleitet,

die damalige französische Regierung durch die Gelehrten Delambre und Mechain die Länge eines elliptischen Meridian-Quadranten ausmitteln ließ und den zehn Millionsten Theil dieser, nur durch eine Erd-Revolution zu verändernden Länge unter dem Namen des Mètre als Maaß-Einheit feststellte.

Nach den genauesten Berechnungen beträgt der Mètre 3,078444 Pariser Fuß (pieds du roi), welcher als Normal-Maaß fast in allen Ländern zur Vergleichung mit andern üblichen Längemaaßen und zur Bestimmung der eigenen diente; nun aber durch sein bekanntes Verhältniß zum Metre selbst eine constante Größe genannt werden darf.

Fast ohne Ausnahme ist der Fuß in allen Ländern als Maaß-Einheit angenommen und seine Größe durch Uebereinkommen, welche durch die verschiedenen Regierungen sanctionirt wurden, festgestellt, und zwar gemeinhin in Theilen des angeführten Pariser Fußes. So ist durch die Königl. Preuß. Maaß- und Gewichts-Ordnung vom 10ten Mai 1816 (Nr. 357 der Gesetzsammlung vom J. 1816) der preußische Fuß zu 139,13 pariser Linien (von welchen der Pariser Fuß 144 enthält) festgestellt.

Für den Feldmesser ist es höchst wichtig, die Verhältnisse der in verschiedenen Ländern üblichen Längen- und Flächenmaaße zu kennen; der Zweck dieser Blätter aber und der Raum gestatten es nicht, dergleichen Angaben hier aufzunehmen, weshalb man hierüber an: Eytelwein, Vergleichung der Maaße und Gewichte rc.; Vega, log. Tafeln 2. Bd. 349; Netto Vermessungskunde 1. Bd. S. 9 — 40; verweiset. Nicht minder wichtig ist es

aber für den Aufnehmenden, Längen und Flächen, welche in einem bestimmten Maaße angegeben sind, durch ein anderes Maaß ausdrücken zu können, welches Geschäft man die Verwandlung der Maaße benennt, und das auf den einfachen Lehren von den Verhältnissen beruhet. Denn soll z. B. angegeben werden, wieviel 518 Fß. Paris. nach preußischen Fußen betragen, so ist einleuchtend, daß, wenn

1 Fuß Paris. = 144 Linien Paris. und

1 Fuß preuß. = 139,13 — —

auch 1 Fß. Paris. : 1 Fß. preuß. = 144 : 139,13 und also:

$$1 \text{ Fß. Paris.} = \frac{144}{139,13} = 1,035003234 \text{ Fß. preuß., mithin}$$

518 Fß. par. = 536,131675212 Fß. preuß.

Soll auf gleiche Weise ausgemittelt werden wieviel, 712 preußische Fuße nach englischem Maaße betragen, und es wäre erwiesen, daß 1 Fß. engl. = 1621,4 Scrupel Paris., von denen 17280 auf einen Fuß Paris. gehen, beträgt, so ist klar, daß

1 Fß. preuß. : 1 Fß. engl. = 1669,56 : 1621,4 und demnach

$$1 \text{ Fß. preuß.} = \frac{1621,4}{1669,56} = 0,971154076 \text{ Fß. engl. u. mithin}$$

712 Fß. preuß. = 691,461702112 Fß. engl.

Auf gleiche Weise wird man in allen ähnlichen Fällen verfahren. Man bestimmt nämlich zuvörderst, wieviel Theile ein jedes der zu vergleichenden Maaße von einem dritten enthält, bestimmt hiernach auf obige Weise, der wievielste Theil das eine dieser Maaße von dem andern ist, und multiplicirt diesen Faktor mit der verlangten Zahl, weshalb man denselben auch Reduktions-Faktor nennt.

Der Fuß wird im gemeinen Leben in 12 Zolle, jeder

derselben in 12 Linien und diese in 12 Scrupel getheilt, welches man die Eintheilung nach dem Duodecimal-System nennt; der Geometer aber theilt den Fuß in 10 Zolle, diesen in 10 Linien und die Linie in 10 Scrupel, d. h. er theilt nach dem Decimal-System.

Die größte Weite welche der Feldmesser in Betrachtung ziehet, ist die Meile, welche aber ein eben so unbestimmtes Maaß ist wie die übrigen, weshalb auch hier die schon angegebenen Werke nachzuschlagen sind, um sich mit ihrem gegenseitigen Verhältniß bekannt zu machen. Ein Gleiches gilt von dem für den Geometer noch gegebenen Maaße der Ruthe, und wir beschränken uns hier nur auf die Angabe nach den Bestimmungen der schon angeführten Preuß. Verordnung. Hiernach enthält eine Ruthe 12 Fß. preuß.; eine Meile 2000 Ruthen. Wenn nun der Feldmesser seine Ruthe in 10 Fuß theilt, so ist klar, daß der Fuß des Geometers, Decimal-Fuß, von dem gewöhnlichen reglementsmäßigen preußischen Fuß abweichen muß. — Führen wir nun der Abkürzung wegen die folgenden üblichen Bezeichnungen ein, als

(ddc) Duodecimalmaaß; (dc) Decimalmaaß;

(°) Ruthe; (′) Fuß; (″) Zoll; (‴) Linie; (ɪᴠ) Scrupel, so ist klar: daß:

$1^{\circ} = 12'\ ddc = 144''\ ddc = 1728'''\ ddc = 20736^{IV}\ ddc$

$1^{\circ} = 10'\ dc = 100''\ dc = 1000'''\ dc = 10000^{IV}\ dc$,

wonach sich nun die gegenseitigen Verhältnisse dieser Maaße bestimmen und vorkommende Verwandlungen bewirken lassen.

In Hinsicht des Flächenmaaßes bedient man sich nach der erwähnten Verordnung der Quadrat-Ruthe als Ein-

heit, deren Unterabtheilungen wieder Quadrat-Fuße ꝛc. sind. Die Verschiedenheit in den gangbaren Flächenmaaßen ist aber eben so groß als jene der Längenmaaße; man findet auch hierüber vielfache Angaben und kann nöthige Verwandlungen mit den, sich aus den Elementar-Begriffen der Arithmetik ergebenden Modificationen leicht nach dem bisher Gesagten ausführen.

Zweiter Abschnitt.

Beschreibung des Meßtisches und der zu demselben nöthigen Werkzeuge.

Der Meßtisch.

Der Erfinder dieses, seit zwei Jahrhunderten seinem Wesen nach als ganz vorzüglich zweckmäßig anerkannten Werkzeuges war Johann Prätorius, Professor der Mathematik zu Altorf. Ein Gestell, auf welchem eine feste Fläche horizontal bewegt werden kann, dies ist die Grundidee des in Rede stehenden Werkzeuges. In einer so langen Reihe von Jahren aber, als dasselbe bekannt ist, mußten viele Meßkünstler sowohl als Mechaniker dahin streben, jene Idee zu erweitern, den Nutzen vielseitiger, und den Gebrauch bequemer zu machen. Indem sie aber, um einen besonders verfolgten Zweck zu erlangen, eigne Vorrichtungen in Anwendung brachten, wurden nicht allein die Einrichtungen des Meßtisches sehr verschieden, sondern auch oft anderen Vorzügen und besonders dem Haupterforderniß, dem festen Stand des Werkzeuges, zu nahe getreten.

Einfach und zweckmäßig, dieserhalb aber als die beste

der bestehenden Einrichtungen, verdient jene genannt zu werden, welche bei der sächsischen Landes-Vermessung den Meßtischen von den Ingenieuren (wahrscheinlich vom damaligen Chef, dem General Aster) gegeben und ihrer Vorzüglichkeit wegen nachmals vielfältig angewandt wurde, und die im Preußischen Staate unter dem Namen der Lehmannischen Einrichtung bekannt ist, wiewohl diese Benennung unrichtig genannt werden dürfte.

Wie alle, so bestehen auch diese Meßtische aus einem Gestelle oder Stativ und dem Meßtisch- oder Mensul-Blatte; die nähere Einrichtung dieser beiden Hauptheile ist aber folgende:

Das Gestell oder Stativ (Fig. 1, A) besteht aus einem hohlen Metall-Cylinder a; an diesem sind drei gebogene Lappen b gelöthet, welche in die Ausschnitte der hölzernen Füße d eingreifen und durch Druckschrauben c mit diesen zu einem Gelenk verbunden werden; wodurch also die Richtung der den Füßen zu gebenden Bewegung bestimmt wird, die Bewegung selbst aber durch Loslassen der Schraube erleichtert, durch das Anziehen derselben aber gehindert werden, mithin den Füßen eine beliebige Neigung gegen den Boden gegeben und die gewählte Stellung derselben unverrückt beibehalten werden kann. Eine Messing-Platte e, welche in der Mitte ihrer ebenen Fläche zu einem abgekürzten Kegel abgedreht worden, schließt die obere Oeffnung jenes hohlen Cylinders, und der abgestumpfte Kegel dient als Zapfen, um welchen sich ein Hohlkegel g drehet, der oben eine Platte f trägt, unten mit einem Kammrade k versehen ist. Die Platte f dient dazu, um hierauf das Meßtischblatt mittelst kleiner Schrau-

ben n zu befestigen, welches nun mit der Hand um jenen Kegel gedreht werden, d. h. welchem man nun die grobe Bewegung geben kann. Um zu bewirken, daß der, das Blatt tragende Hohlkegel nicht von dem Zapfen abgezogen werden könne, ist eine Schraube m durch die Platte f in dem Zapfen angebracht und der Knopf derselben in die Platte eingelassen.

In das Kammrad k greift eine Schraube ohne Ende h ein, das Gehäuse derselben ist um kleine Zapfen i (Fig. 2) so beweglich, daß es durch die Schraube l von dem Rade abgerückt oder näher angedrückt werden kann. Hat man, durch Umdrehung dieser Schraube, die Schraube ohne Ende so abgerückt, daß ihre Gewinde nicht mehr in die Zähne des Kammrades eingreifen, welches mit Vorsicht geschehen muß, um die Beschädigung der Schraubengänge zu verhüten, so kann die oben erwähnte grobe Bewegung des Blattes frei geschehen; drückt man dagegen das Gehäuse mehr an, so daß die Gewinde nun eingreifen, so wird man, durch Umdrehung der Schraube ohne Ende, das Kammrad und so mit auch die Platte langsam drehen, d. h. ihr die feine Bewegung ertheilen können. Mit Ausnahme der Füße, welche von Holz, und deren Spitzen, welche mit einem eisernen Beschlag versehen sind, werden die übrigen genannten Theile des Stativs aus Messing gefertigt. — Die Reibung zwischen Metall auf Metall sucht man durch Einschmieren mit einer aus zerlassenem reinen Wachs und Baumöhl bestehenden Mischung zu vermeiden. Zeigt sich aber, daß, ungeachtet man die Schraube ohne Ende fest gegen das Kammrad gedrückt, doch noch eine Bewegung des Blattes um den

Zapfen möglich ist, so daß es also bei geringer Veranlassung eine andere Lage annehmen wird, dann rührt dieser Hauptfehler beim Meßtische von einem todten Gang der Schraube her; es hat sich nämlich alsdann das Gewinde derselben durch den zwischen ihr und dem Rade sich setzenden Staub abgeschliffen und läßt dem Rade noch Spielraum zur Bewegung; es verlangt dieser Fehler, welcher das Werkzeug völlig unbrauchbar macht, die Hülfe eines Mechanikers.

Weniger zusammengesetzt, portativer, aber auch weniger fest, ist das sogenannte Feldstativ (Fig. 3). Es bestehet aus einer hölzernen, abgekürzten dreiseitigen Pyramide ab, deren oberes Ende zu einem kreisförmigen Zapfen abgerundet ist, welches mit einem Messing-Ring belegt wird; um diesen Zapfen dreht sich die Dille d, welche mit einer Platte f verbunden ist, die wiederum das Meßtischblatt trägt und mittelst dreier Schrauben mit demselben verbunden wird. Die grobe Bewegung, so wie die feine, wird hier mit der bloßen Hand hervorgebracht; letztere kann daher nicht mit der Geschwindigkeit bewirkt werden, wie bei den vorhin beschriebenen Vorrichtungen. Um die Bewegung des Blattes zu hindern, ist um die Dille ein Preßring e gelegt, mittelst dessen man diese an den Zapfen fest andrücken kann. Am untern Ende der Pyramide sind auf den Seiten derselben die drei Füße g durch Schrauben befestigt; sie haben demnach eine bestimmte Neigung gegen den Boden, können aber so zurück geschlagen werden, daß sie an den Seiten der Pyramide flach anliegen, und so einen abgekürzten Kegel von derselben Länge bilden, welche höchstens $2\frac{1}{4}$ ddc′ beträgt.

Das Meßtischblatt (Fig. 1. B) ist, wie gesagt, der zweite Haupttheil des Meßtisches und wird am zweckmäßigsten auf nachstehende Weise angefertigt. Ueber einen Blendrahmen, welcher am besten von trockenem Tannen oder Fichten=Holze gemacht wird, leimt man an beiden Seiten $\frac{3}{8}''$ dicke lindene Bretter, so, daß die Holzfasern derselben einander durchkreuzen. An dem unteren Brette wird eine Messingplatte p welche die Muttern für die durch die Platte f des Stativs gehenden Schrauben n enthält, wiederum durch Schrauben befestigt; damit diese aber genug Haltung haben mögen, werden in dem, zwischen den beiden Brettern bleibenden hohlen Raum, an den Orten, wo sie durchgehen, wenig größere Hölzer, von der Dicke des Rahmens gelegt, welche den Gewinden Holz und so den Schrauben Haltung geben.

Durch diese Einrichtung des Meßtischblattes erreicht man aber die Vortheile, daß wegen der Lage der Bretter das Ganze sich nicht durch Ausdehnung oder Zusammenziehen werfen kann, und daß das Blatt selbst leichter ist als andere massiv gearbeitete; überdem ist der bleibende hohle Raum gut, um etwa abgebrochene und im Holze stecken bleibende Nadelspitzen hinab drücken zu können.

Die obere Fläche des Blattes wird endlich mit Papier oder Staniol überzogen, auf welchem die gemessenen Figuren durch Zeichnung niedergelegt werden sollen. Am häufigsten bedient man sich hierzu des Papiers, obwohl auch der Staniol seine unverkennbaren Vortheile hat, da er den Einwirkungen der Feuchtigkeit nicht so ausgesetzt ist als jenes, und wiederholt gebraucht werden kann. Das Papier spannt man indeß dadurch auf das Blatt, daß

man es auf einer Seite, zu welcher man die, durch Schmuzflecke ꝛc. am schadhaftesten gewordene, wählt, mit zu Schaum geschlagenem Eyweiß gleichförmig bestreicht, mit dieser Seite auf das Blatt legt und mit zwei zusammengeballten Tüchern aus der Mitte nach den Seiten so lange ausstreicht, bis es fest und überall glatt aufliegt; alsdann biegt man die hervorstehenden Ränder um und leimt sie mit Mundleim an die Kanten des Brettes. Durch diese Art des Aufspannens erhält man den Vortheil, daß, indem das Papier überall fest anklebt, es auch weniger durch die Feuchtigkeit ausgedehnt werden und keine Blasen werfen kann, wie dies bei solchen Bogen, die nur durch Anfeuchten mit reinem Wasser aufgespannt werden, unvermeidlich ist, wenn man in feuchter Witterung arbeitet. Uebrigens läßt es sich, wenn man den fest geleimten Rand abschneidet, mit etwas Behutsamkeit leicht ablösen und die abgenommene Zeichnung wird nun auch nicht so leicht einlaufen, als es wohl sonst der Fall ist. Diese Vortheile und auch jenen, daß die bestrichene Seite des Papiers nicht so bedeutend gefärbt werde, erhöht man dadurch, wenn man das Eyweiß in einem Gefäß ganz zu Schaum quirlet, dann aber so lange stehen läßt, bis der Schaum zergangen und das Ganze wieder völlig flüssig ist; hienach setzen sich die gröberen Theile zu Boden und das mit Behutsamkeit abgegossene obere klare wird nun zu den genannten Zwecken noch besser zu benutzen sein. Wenn man vielmal auf diese Weise aufgespannt hat, so häuft sich auf der Oberfläche des Meßtischblattes so viel getrocknetes Eiweiß, daß das Papier zuletzt völlig festklebt, und ohne Beschädigung nicht abgelöset werden kann. Um dies

zu verhüten, versäume man nicht, allemal nach dem dritten oder vierten Male des Aufspannens das Meßtischblatt abzuwaschen.

Mit dem auf diese Weise ausgerüsteten Meßtisch allein würden wir indeß nichts zu leisten vermögen; es sind noch mehrere Werkzeuge zu den Operationen, welche ausgeführt werden sollen, nöthig, und zu diesen theils unumgänglich nothwendigen, theils ganz oder theilweise entbehrlichen Hülfsmitteln rechnen wir:

1. Die Einlothzange.

Es wird oft verlangt, den Meßtisch so zu stellen, daß ein darauf bemerkter Punkt sich senkrecht über einen Punkt auf der Erdoberfläche, wo etwa ein Signal, eine Fahne rc. gestanden hat, befinde. Um dies zu bewirken bedient man sich der Einlothzange (Fig. 4.); dies ist ein Metallstab, welcher gabelförmig und so gebogen ist, daß seine beiden Zweige gleich groß sind. Das Ende a des einen derselben wird mit einem Häckchen versehen, in welches man ein Bleiloth einhängen kann, das Ende b des andern Zweiges aber wird zugespitzt. Man schiebt diese Zange auf den Meßtisch, welcher bereits seine Stellung nach dem Augenmaaß erhalten hat, so daß die Spitze b den bestimmten Punkt auf dem Blatte berührt, klemmt nun die Zange durch die Schraube zusammen und hängt in a ein Bleiloth, welches senkrecht den unter b befindlichen Punkt des Erdbodens angeben wird, und wonach man im Stande ist, dem Tische genau die verlangte Stellung zu geben.

Bei militairischen Aufnahmen, wo eine so geringe

Abweichung von der Wahrheit, wie hier durch die Abweichung der betreffenden Punkte von der senkrechten Lage erzeugt werden kann, unbeachtet bleibt, gebraucht man dieses Instrument gar nicht und begnügt sich einen Stein unter dem, auf der Platte bemerkten, Punkt zu halten, welcher, wenn man ihn fallen läßt, den senkrecht darunter liegenden Punkt des Erdbodens genau genug bezeichnet.

Wie in der Folge gezeigt werden soll, kann man aber auch das Werkzeug gänzlich entbehren.

2. Die Libelle oder Wasserwage.

Die zu messenden Linien und Winkel sind in der Wirklichkeit an keine bestimmte Lage gebunden, verschiedene Zwecke aber erfordern es, daß sie auf wagerechte (horizontale) Ebenen entworfen werden; dieserhalb ist es nöthig, die Lage jeder zu messenden Linie gegen eine sie schneidende wagerechte zu bestimmen, und eben so die Winkel zu kennen, welchen die Ebene, in der ein gemessener Winkel liegt, mit einer sie schneidenden wagerechten Ebene macht. Werden nun durch den Meßtisch dergleichen Linien und Winkel gemessen, so muß die Oberfläche desselben, in eine wagerechte Lage gebracht (horizontal gestellt) werden, um entweder mit den eben so gelegenen Linien und Punkten in einer Ebene zu sein, oder doch die Neigung derselben gegen die Wagerechte bestimmen und sie dann durch Rechnung auf den Horizont reduziren zu können. — Um nun das Verlangte zu erfüllen, dem Meßtischblatt eine horizontale Lage zu geben, bedient man sich jetzt der Libelle, früher aber begnügte man sich mit dem Gebrauch der gewöhnlichen Setzwage.

Die Libellen sind mit Weingeist gefüllte, verschlossene und eine kleine Luftblase enthaltende Gefäße, welche letztere dadurch, daß sie als leichtere Körper, nach den ersten Prinzipien der Physik den möglich höchsten Standpunkt nimmt, eben zu den gewünschten Bestimmungen dient. Man pflegt lange und dosenförmige Libellen zu unterscheiden.

Die langen Libellen sind Glasröhren, deren innerer Raum gehörig calibrirt ist, d. h. welcher auf jedem Punkte einerlei Durchmesser hat; diese werden mit Weingeist gefüllt und auf beiden Enden zusammengeschmelzt, so, daß noch eine Luftblase, welche jedoch nicht zu groß sein darf, mit eingeschlossen ist. Die Röhre wird alsdann erhitzt und so gebogen, daß die obere Wand einen Zirkelbogen von sehr großen Halbmesser bildet. Diese Vorkehrung ist deshalb nothwendig, damit die Blase nicht, wie bei cylindrischen Röhren, bei der kleinsten Abweichung der unterstützenden Ebene von der horizontalen Lage gleich bis zu Ende der Röhre läuft, wo nun der höchste Punkt ist und daher sehr schwer oder oft gar nicht in die Mitte gebracht werden kann, weil man nie die Größe dieser Abweichung kennt. Beim Kreisbogen aber, dessen Sehne die Unterstützung gewährt, oder dessen Sehne wenigstens mit der durch die Stehpunkte zu legenden Linie parallel ist, wird, wenn die Stehpunkte sich in horizontaler Lage befinden, die Blase sich in der Mitte des Bogens als dem höchsten Punkt zeigen und sich bei geringen Abweichungen langsam von diesem Mittelpunkt des Bogens entfernen. Es darf aber auch im Gegentheil der Bogen nicht zu stark gekrümmt sein, d. h. einem zu kleinem Kreise angehören, weil sonst die Empfindlichkeit der Blase bedeutend leiden

würde. — Die so geformte Libelle wird nun mit einem Gehäuse umgeben, welches sie so umschließt, daß nur der obere Theil, wo sich die Blase bewegt, sichtbar bleibt und mit den Stehpunkten entweder in eine feste Verbindung gebracht oder auf solche Weise eingerichtet wird, daß die Stehpunkte verschoben werden können. Das Erstere wird erlangt, wenn man das Gehäuse unmittelbar mit einer auf der unteren Seite völlig ebenen Platte so in Verbindung setzt, daß letztere Ebene mit einer durch die Chorde der Libelle gedachten, senkrecht auf der Kreisfläche der Libelle stehenden Ebene parallel läuft (Fig. 5); — das letztere kann dadurch bewirkt werden, daß man die Libelle an einem Ende durch eine Gelenk a (Fig. 6) an der Platte befestigt und am anderen Ende b eine Schraube anbringt, durch welche man eine Bewegung der Libelle in einer auf die Platte senkrecht stehenden Ebene hervorbringen kann; oder man kann auch dem Gehäuse Füße geben (Fig. 7), welche mehr oder minder eingeschraubt werden können, um der Libelle eine andere Lage gegen die durch die Stehpunkte zu legenden Ebenen zu geben.

Ist nun die Ebene, auf welcher die Libelle ruht, wagerecht und die Chorde der Libelle ihrer graphischen Projection auf derselben parallel, so wird die Luftblase unverrückt im Mittelpunkte des Bogens stehen. Man bemerkt diesen Punkt durch einen kleinen Strich, welcher eingerissen oder eingeätzt wird und nennt ihn den Stellpunkt der Libelle. Ist aber die unterstützende Ebene gegen den Horizont geneigt, so wird die Blase nach der erhöhten Seite hinaufrücken. Sei (Fig. 8) AF die Horizontale, AB die Sehne der Libelle oder die derselben parallele Unterstütz-

zungs-Ebene, mithin $< BAF = x$ der Neigungswinkel der zu richtenden Ebene gegen die wagerechte, so ist auch, wenn D der Mittelpunkt des Bogens, C der Mittelpunkt des zugehörenden Kreises und E der Stand der Blase, die Linie EC senkrecht auf AF, welche der Tangente für E parallel ist; und eben so wird DC senkrecht auf AB als halbirenden Radius sein, mithin aber:

$< o = < p = R$ und $< s = < r$, als Scheitelwinkel; demnach

$$< x = < C,$$

d. h. der, dem von der Blase durchlaufenen Bogen DE zugehörende Winkel am Mittelpunkt, ist eben so groß als der Neigungs-Winkel der Ebenen. Man darf daher nur die zu richtenden Ebenen um einen solchen Winkel vorrücken, um die Blase in den Stellpunkt, sie selbst aber in die horizontale Lage zu bringen.

Auf Libellen, welche, nur einigermaaßen genau sein sollen, bringt man in gleicher Entfernung zu beiden Seiten des Stellpunktes, Theilstriche an, welche die Abweichung der Blase angeben und deshalb mit Ziffern versehen sind. Ist nun der Stellpunkt nicht richtig angenommen, so darf man nur, wenn die Libelle horizontal stehet, die Abweichung der Blase bemerken, sie alsdann umkehren, (so, daß das Ende a (Fig. 6) da, wo früher das Ende b stand, zu ruhen kommt, welches man das Umdrehen von Punkt zu Punkt nennt, und mit der größten Genauigkeit geschehen kann, wenn man die Platte oder Füße mit einem Bleistift umzieht und der Libelle bei der Drehung dann genau denselben Platz giebt) und nur gleichfalls die Stellung der Blase anmerken, welche nun auf der andern Seite, wieder genau um den Neigungs-Winkel der Ebene,

vom

vom wahren Nullpunkt abweichen wird. Beide durchlaufene Bogen addirt und gehalbtheilt, müssen demnach nothwendig die wahre Neigung, und so die Hälfte der Distanz zwischen den beiden Ruhepunkten der Blase den wahren Nullpunkt angeben.

Ist dagegen die durch die Stützpunkte gezogene Linie nicht der Chorde der Libelle parallel und sind die Stützpunkte selbst in einer festen Lage gegen jene, so muß diesem Fehler durch Hülfe eines Mechanikers abgeholfen werden; sind aber die Stützpunkte beweglich, wie bei den (Fig. 6 und 7) angegebenen Libellen, so findet man die Neigung der Chorde gegen diese Linie ebenfalls durch das Umwenden von Punkt auf Punkt, und kann alsdann den statt habenden Fehler durch die angebrachten Schrauben verbessern. Hier verursacht es indeß einen Unterschied, ob der Winkel, welchen die Chorde gegen die Linie durch die Stützpunkte macht, größer oder kleiner als die Neigung der zu prüfenden Ebene gegen den Horizont ist. Sei nämlich (Fig. 9, A) $< GAF = a$, der Neigungswinkel der Ebene größer als $< BAG = x$ die Neigung der Chorde gegen jene Ebene; so ist, wenn wir die übrigen Punkte und Linien wie vorhin bezeichnen:

$$< o = < p = R; \quad < r = < s$$

als Scheitelwinkel, und also

$$x + a = C.$$

Drehen wir nunmehr die Libelle um und legen durch A' (Fig. 9, B) eine Horizontale AA', so wird wegen der Parallele $< A'AG = a$ sein und die Chorde demnach unter diese Horizontale fallen, die Blase mithin durch den Nullpunkt auf die Seite nach A gehen, dann aber wird wieder:

$$\angle o = \angle p, \quad \angle r = \angle s,$$

und also auch

$$a - x = C.$$

Alsdann aber ist:

$$\frac{a + x + (a - x)}{2} = a$$

und $$\frac{a + x - (a - x)}{2} = x.$$

Im andern Falle, wo der Neigungswinkel a der Ebene kleiner ist als die Neigung der Chorde gegen die unterstützte Linie, wird man, wie leicht einzusehen, bei der ersten Stellung ganz das nämliche Resultat wie vorhin erhalten, nämlich es wird:

$$x + a = C.$$

Bei der zweiten Stellung aber (Fig. 10) wird wieder $\angle A'AG = a$, mithin muß die Chorde über die durch A gelegte Horizontale hinausfallen und daher auch die Blase auf der Seite der Libelle nach B hin bleiben. Nach gleichen Schlüssen wie vorhin geben hier aber:

$$\angle o = \angle p, \quad \angle r = \angle s$$

und also $x - a = C.$

Dann aber ist:

$$\frac{(a + x) + (x - a)}{2} = x$$

und $$\frac{a + x - (x - a)}{2} = a.$$

So aber wird die allgemeine Regel gerechtfertigt werden:

„Fällt die Blase bei der Umwendung jedesmal auf eine und dieselbe Seite des Nullpunktes in Rücksicht des Beobachters, so corrigiren wir die Hälfte der Summe der durchlaufenen Bogen an der Ebene und die halbe Differenz derselben an der Libelle; liegt aber die Blase

bei der Umwendung jedesmal auf der entgegengesetzten Seite des Nullpunktes, so verbessern wir die halbe Differenz an der Ebene und die halbe Summe an der Libelle."

Da bekanntlich die Lage einer Ebene durch drei Punkte bestimmt wird, die lange Libelle indeß nur zwei Punkte in eine horizontale Lage bringt, so wird man durch eine andere Stellung derselben diesen dritten Punkt ebenfalls einrichten und hiemit die ganze Ebene in die wagerechte Lage bringen müssen; da nun eine, auf die frühere senkrechte Stellung der Libelle einen, seiner Lage nach von den vorherigen am entferntesten liegenden Punkt bestimmt, so wird diese Stellung auch die vortheilhafteste sein, in welcher man nur auf die vorhin beschriebene Art verfährt. Da aber durch die jetzige Veränderung der Ebene auch die bereits bestimmten Punkte wieder aus ihrer erhaltenen Lage gebracht zu werden pflegen, so wird man diese Operationen wiederholen und zuweilen oft wiederholen müssen, bis man ohne alle weitere Abänderung an der Ebene oder Libelle die Blase bei jeder Stellung im Null- oder Mittelpunkte findet.

Die dosenförmigen Libellen werden häufiger beim Meßtische angewendet als die langen, weil mit dem Gebrauche dieser letztern viel Zeitverlust verbunden ist, wie aus dem Gesagten erhellt. Diese Art der Libellen besteht aus einer cylinderförmigen metallenen Büchse (Fig. 11 und 12), welche durch ein Glas, dessen obere Seite eben, dessen untere aber hohl ausgeschliffen und nicht polirt ist, d. h. durch ein planconcaves Glas geschlossen wird, indem dasselbe in den ebenen Rand eingesprengt und verkittet wird. Im Boden dieser Büchse wird ein

Oeffnung a angebracht, durch welche der Weingeist eingefüllt wird, und welche durch eine Schraube, um deren Rand man, der größeren Dichtigkeit wegen, Leder zu legen pflegt, verschlossen werden kann. — Da der Boden dieser Büchse selbst eine Ebene ist, so wird auch durch diese Libelle die ganze Ebene, auf welcher sie ruht, mit einem Male in die horizontale Lage gebracht, in welchem Falle die Luftblase genau in der Mitte b des Kugelabschnitts c d, welchen die concave Seite des Glases bildet, stehen muß. Dieser Punkt wird ebenfalls bezeichnet und um ihn werden mehrere concentrische Kreise eingeäzt, um das Abweichen der Blase verfolgen zu können.

Die Richtigkeit dieser Libelle wird man ebenfalls dadurch prüfen können, daß man sie umwendet, nachdem man sie zuvor mit einem Bleistift umzogen hat, um den Ort, wo sie ruhet, unverändert beizubehalten. Bleibt auf einer schon wagerecht gestellten Ebene die Blase nicht in allen Richtungen im Mittelpunkte, so ist die Entfernung des Bodens vom Rande des Glases nicht überall gleich; diesem Fehler kann aber nur durch Abdrehen der Wand vom Mechanikus abgeholfen werden.

3. Die Orientir-Boussole.

Wenn auf einem Meßtische bereits einige Punkte aufgetragen, die Richtungen zu messender Linien angegeben sind u. s. w., und man kömmt im Verfolg der Arbeit auf einen andern Standort, so wird es nothwendig, dem Blatte eine solche Lage zu geben, daß jene gezeichneten Linien eine, ihrer früheren, parallele Lage bekommen; zu

dieser Verrichtung, also zum Einrichten des Meßtisches, bedient man sich der Orientir-Boussole.

Wir nennen einen in unendlicher Ferne im Himmelsraume gedachten Punkt, der über unserm Scheitel stehet, oder als Endpunkt einer auf der Ebene des Horizonts senkrecht stehenden Linie gedacht werden kann, den Zenith des betreffenden Standpunktes; wir nennen ferner die Punkte am Himmelsgewölbe, welche allein die primitive tägliche Bewegung des Alls nicht zu theilen scheinen, die Pole; eine Ebene aber, welche wir durch Zenith und Pol so gelegt denken, daß sie jene des Horizonts senkrecht schneidet, eine Mittagsebene, und die Durchschnittslinie dieser Ebene mit jener des Horizonts, die Mittagslinie des betreffenden Ortes. Alle diese Mittagslinien verschiedener Orte, welche verschiedene Zenithe haben, durchschneiden sich, da die Pole allein feststehend sind, in diesen unendlich entfernten Punkten; können demnach für kurze Entfernungen als parallel angenommen werden. Hat man also die Mittagslinie eines Standortes auf dem Meßtische bestimmt, so braucht man nur denselben auf dem zweiten u. s. w. Standort so einzurichten, daß die bemerkte Mittagslinie in jene wirkliche des nunmehrigen Standorts zu liegen kömmt, um auch alle andere gegen diese geneigten Linien in eine ihrer früheren parallele Lage zu bringen. — Die wirkliche Mittagsebene zu finden und eine Mittagslinie zu ziehen, geschieht auf mancherlei, durch aus der Astronomie entlehnte Wahrheiten begründete Methoden; da diese indeß nicht alle im gemeinen Leben anwendbar, die anwendbaren aber mehr oder minder unvollkommen und Zeit raubend sind, so hat

man sich durch den Erfahrungssatz: „daß eine Stahlnadel, welche nach einer gewissen (weiter unten angegebenen) Art mit einem Magnet bestrichen und so eingerichtet ist, daß sie sich in horizontaler Lage frei und mit der möglich geringsten Reibung bewegen kann, eine Richtung annimmt, welche mit der Mittagslinie nicht zu weit von einander entfernter Orte fast einerlei Winkel macht," bewogen gefunden, die Linien, deren Richtung diese Magnetnadel angiebt und welche man die magnetischen Mittagslinien nennt, als unter sich parallel anzunehmen und zu der erwähnten Einrichtung des Meßtisches als zulänglich zu achten, obwohl man dabei mehrfachen Fehlern ausgesetzt ist, von denen später noch ein Mehreres gesagt werden soll.

Der Magnet ist ein Eisenerz, welches die Eigenthümlichkeit besitzt, Eisen und, wie man erst in neueren Zeiten fand, auch Kobald und Nickel anzuziehen, wiewohl die letzteren Halbmetalle nur in geringerem Maaße; außerdem aber immer bestrebt ist, sich mit gewissen Punkten nach bestimmten Weltgegenden einzurichten, die nicht weit von den Weltpolen entfernt sind, weshalb man nun die Linie, in welche diese Punkte sich einzurichten streben, die magnetische Mittagslinie, und jene Punkte des Magnets selbst Pole, und zwar nach den betreffenden Himmelsgegenden, Nord- und Südpol zu nennen pflegt. — Diese Pole haben ferner die Eigenschaft, daß die ungleichnamigen einander anziehen, die gleichnamigen aber abstoßen, weshalb man jene auch die freundschaftlichen Pole benennt. Dem Eisen, welches von einem Magnet getragen wird, theilt sich diese Eigenschaft so lange mit, als es der

Anziehung des Magnetes ausgesetzt ist, welches man mit Eisenfeilspänen am besten versuchen kann; dem Eisen können aber auch die Eigenschaften des Magnetes für beständig mitgetheilt werden, wenn man dasselbe wiederholt und gleichförmig nach einer Richtung mit einem und nach der entgegengesetzten mit dem andern Pole eines Magnetes bestreicht, wodurch es zu einem künstlichen Magnete wird, und ein solcher ist die bei der Boussole in Anwendung gebrachte Magnetnadel.

Die Orientir-Boussole (Fig. 13) besteht aus einer messingenen cylindrischen Büchse von 2 bis 3 Zoll Durchmesser und $\frac{3}{4}$ Zoll Höhe. Im Mittelpunkt a des Bodens derselben befindet sich ein senkrecht angebrachter Stift ab, auf welchem sich die Nadel df bewegen soll. Die Gestalt der Nadeln ist verschieden, am besten sind diejenigen, welche ein dünnes Parallelogramm bilden, und also, ohne schwer zu sein, breitere Enden bieten, wodurch sich die magnetische Polarität mehr äußern kann als bei zugespitzten Nadeln oder solchen, welche die Gestalt eines Pfeils erhalten; eine die Mitte des Parallelogramms bezeichnende Linie wird bei so gestalteten Nadeln eben so gut als Zeiger dienen, wie die Spitze des Pfeils es vermochte. — Den Nadeln wird die magnetische Kraft am besten dadurch mitgetheilt, daß man sie auf einen ebenen Tisch legt, und, indem man zwei magnetische Eisenstangen, a c und b d (Fig. 14), mit einer Hand so faßt, daß die ungleichnamigen Pole a und b beider Stangen einander berühren, nach einander mit den Enden c und d, vor- und rückwärts die betreffende Hälfte der Nadel, gleichmäßig stark aufdrückend, bestreicht; man

verwechselt alsdann die Stangen, hält die Enden c und d zusammen und streicht mit b, wo früher mit c, und mit a, wo Anfangs mit d gestrichen wurde. Wie oft man streichen muß, läßt sich nicht angeben: man erreicht ein Maximum der Kraft, über welches hinaus man dieselbe nie steigern kann. Blau angelaufene Nadeln nehmen die magnetische Kraft leichter an, verlieren sie aber auch schnell und sind deshalb zu verwerfen.

Damit die Nadel sich frei auf dem vorhin genannten Stifte ab (Fig. 13) bewegen könne, wird sie in ihrem Schwerpunkte, der genau mit ihrem Mittelpunkte zusammenfallen muß, durchbohrt und über dieses Loch ein trichterförmiges, conisch ausgehöhltes Hütchen, aus Glas, Agat, Karneol oder einer andern festen Steinart gefertigt, befestigt. Um die Reibung des Stiftes in dieser Aushöhlung so gering als möglich zu machen, pflegt man letztere halbkugelförmig zu enden.

In gleicher Höhe mit der Spitze des Stiftes ist in der Büchse ein Ring g befestigt, auf welchem die wahre und die magnetische Mittagslinie angemerkt sind; das Ganze wird endlich mit einem Glasdeckel verschlossen, um die Nadel gegen die Einwirkungen der Witterung, gegen Staub und die Bewegungen der Luft zu sichern. Diese so ausgerüstete Büchse wird auf eine Platte hl befestigt, welche durchbohrt ist, um sie an das Meßtischblatt anschrauben zu können, welches allemal so geschieht, daß die wahre Mittagslinie mit zwei von den Randlinien des Meßtisches parallel ist. Früher brachte man die Nadel in einem Kästchen auf dem Diopterliniale an.

Wie unzuverlässig die Angaben dieses Werkzeuges

sind, leuchtet schon daraus ein, daß die wahren Mittags-linien nicht völlig parallel sein können, die magnetischen es aber auch nicht sind und überdem oft während kurzer Zeit eine etwas veränderte Lage annehmen; daß ferner Eisen, welches durch Zufall in die Nähe der Nadel kömmt, oder eisenhaltiger Boden, einen großen Einfluß auf die Nadel haben und sie von ihrer wahren Lage ableiten. Aus diesem Grunde sucht man die vorliegenden Bestimmungen bei genauen Arbeiten durch andere Mittel zu erhalten, und so ist also auch der Gebrauch dieses Werkzeuges nur beschränkt, dennoch aber dasselbe nicht ganz entbehrlich.

4. Das Diopter-Lineal.

Um nunmehr auf dem gehörig gestellten Meßtische Linien in der Richtung ziehen zu können, wie wir sie uns auf dem Erdboden zwischen bestimmten Punkten denken, bedürfen wir eines Lineals, welches so eingerichtet ist, daß wir mit Bequemlichkeit und Genauigkeit eine seiner Kanten in jene Richtung bringen und dann längs derselben die verlangte Linie ziehen können; diesen Erfordernissen soll das Diopter-Lineal (Fig. 15) genügen. Es besteht dasselbe aus einem messingenen Parallelogramm c d von der Länge der Diagonale des Meßtisches, von $1\frac{1}{2}$ Zoll Breite und $1\frac{1}{2}$ Linien Dicke; an beiden Enden dieses Lineals werden kleinere messingene Platten senkrecht aufgestellt, welche man Dioptern (Absehen) nennt, und die so eingerichtet sind, daß ihre Mittellinien mit den betreffenden Kanten des Lineals, mithin die Punkte a, c, d, b, in einer auf die Fläche des Lineals senkrechten Ebene stehen, welche man die Visirebene nennt. Die Dioptern ragen

demnach mit ihrer einen Hälfte über das Lineal hervor, mit der andern sind sie aber durch ein Gelenk dem Lineale so verbunden, daß man sie auf dasselbe ganz niederlegen, aber sie nicht weiter aufmachen kann, als bis sie senkrecht stehen. Diese Diopteren sind ferner in obere und untere Hälften getheilt. Die eine derselben ist längs der genannten Mittellinie entweder mit kleinen Visirlöchern versehen, oder die Mittellinie in ihrer ganzen Länge durch einen feinen Einschnitt zum Durchsehen geeignet; die andere Hälfte ist so durchbrochen, daß sie einen Rahmen bildet, in welchem die Mittellinie durch ein straff angespanntes Pferdehaar oder einen Silberdraht bezeichnet ist. Diese Einrichtung ist beiden Diopteren dergestalt gegeben, daß, wenn die untere Hälfte des einen mit Visirlöchern versehen ist, die untere Hälfte des andern den Rahmen bildet, und so umgekehrt mit den oberen Hälften. Mittelst dieser Einrichtung wird man also, durch eines der Visirlöcher oder den Einschnitt sehend, einen Gegenstand durch das Haar oder den Draht der gegenüberstehenden Diopteren gedeckt finden, welcher mit beiden Mittellinien in einer auf die Fläche des Lineals und demnach auch auf die Ebene des Meßtisches senkrechten Ebene stehet, deren Durchschnitt mit dem Meßtisch durch eine längs der Kante des Lineals gezogene Linie angegeben wird. Dasjenige Diopter, durch welches man siehet, d. h. welches mit den Visirlöchern versehen ist, heißt das Ocular-Diopter, das andere nach dem Gegenstand gerichtete ist das Objectiv-Diopter. Man bemerkt, daß bei dem beschriebenen Lineal jedes Diopter beide Stellen vertreten, daß man also in jeder Lage desselben vor- und rückwärts

visiren kann, welches die Genauigkeit des Einrichtens in die verlangte Lage bedeutend erhöht; auch wird man aus dem Gesagten entnehmen können, daß solche ältere Diopterlineale, wo die Visirebene nicht die Kante, sondern die Mitte des Lineals schneidet, nicht tauglich sind.

Wegen der leichten Verletzbarkeit der ausgespannten Haare, und wegen des Einflusses, welchen die Feuchtigkeit darauf äußert, könnte man auch in den durchbrochenen Rahmen des Objectiv-Diopters ein ebenes Glas einsprengen, auf welchem die Mittellinie durch einen feinen eingeätzten Strich bemerkt wird. Die Oberflächen eines solchen Glases müssen aber genau parallel sein, wenn nicht eine störende Brechung der Lichtstrahlen erfolgen soll. Die Parallelität derselben prüft man dadurch, daß man das Diopter-Lineal auf eine nahe gelegene gerade Linie, etwa auf die Kante eines Daches u. s. w. so richtet, daß man einen Theil derselben in freier Luft, den andern aber durch das Glas siehet: findet keine Brechung der Strahlen statt, d. h. sind die Oberflächen des Glases parallel, so müssen beide Abschnitte in einer geraden Linie liegen; im Gegentheil wird man den durch das Glas betrachteten Theil höher oder niedriger als den andern erblicken. Eine gleiche Prüfung unternimmt man alsdann bei einem senkrecht stehenden Gegenstande, etwa der Ecke eines Hauses o. dgl.

Zur Prüfung, ob bei der erst genannten Einrichtung der Dioptern die Pferdehaare genau die Mittellinie bezeichnen und senkrecht auf der Fläche des Lineals stehen, visirt man durch eines der Visirlöcher auf einen als senkrecht bekannten hohen Gegenstand, wozu man auch

eine an einem windstillen Orte durch ein Gewicht angespannte Schnur, oder auch eine längs einer Mauer genau senkrecht gezogene Linie wählen kann, und bringt das Pferdehaar genau mit diesem Gegenstande zur Bedeckung. Ist die Fläche des Lineals alsdann in wagrechter Lage, so hat das Haar seine richtige Stellung; sieht man nun durch die andern Visirlöcher und findet eine Abweichung, so sind diese nicht genau in der Vertikalebene; weicht aber das Haar bei der wagrechten Lage des Lineals von dem Gegenstande so ab, daß es denselben nur oben oder unten berührt, so haben die Dioptern selbst eine gegen die Fläche des Lineals geneigte Stellung; allen diesen Fehlern muß durch einen Mechaniker abgeholfen werden. Die Visirlöcher sind für die Augen schonender als die Einschnitte, dürfen indeß nicht zu weit, aber auch nicht zu eng sein. Im ersten Falle können Unrichtigkeiten entstehen, indem man sich nicht genau mit dem Auge in der Vertikalebene befindet, d. h. es entstehet eine, Fehler verursachende, Parallaxe: man entdeckt dies, wenn man mit dem Auge, nachdem man den gewählten Gegenstand durch das Haar u. s. w. des Objectiv-Diopters gedeckt gefunden, etwas zur Seite rückt und nun den Gegenstand nicht mehr genau gedeckt findet. Sind die Visirlöcher dagegen zu klein, so entsteht Undeutlichkeit und das Auge des Beobachters wird unnöthig angestrengt.

Das unter dem Namen des Lehmannischen Diopter-Lineals bekannte Werkzeug hat folgende Construction: es sind die Dioptern nicht, wie die bisher beschriebenen, in ihren untern und obern Hälften verschieden, und als Ocular- und Objectiv-Dioptern zugleich zu gebrauchen, es

hat demnach das Ocular-Diopter (Fig. 16) a b nur Visirlöcher, und das Objectiv-Diopter c d nur einen ausgespannten Faden; es kann deshalb nur zum Vorwärtsvisiren gebraucht werden, und ist in dieser Hinsicht weniger gut zum genauen Einrichten als das vorhin beschriebene Werkzeug; es ist das in Rede stehende Diopter-Lineal aber auch zu Höhen- und Tiefen-Bestimmungen eingerichtet. Zu diesem Zwecke läßt sich auf der äußern Seite des Objectiv-Diopter ein kleiner Rahmen m verschieben, in welchem ein Faden horizontal, d. h. der Fläche des Lineals parallel ausgespannt ist, welcher also das Haar des Diopters senkrecht durchschneidet, das Diopter selbst wird aus seinem gewöhnlichen Stand bei n genommen und in einer Entfernung b d, welche gleich dem Abstande der beiden äußersten Visirlöcher a b ist, vor dem Ocular-Diopter festgeschraubt; diese Länge a b ist auf der innern Seite des Objectiv-Diopter aufgetragen und in hundert gleiche Theile zerlegt; auf der äußern Seite desselben sind die Tangenten der Winkel von 0° bis 45° für den Halbmesser a b aufgetragen, jedoch nur die der ganzen Grade; so aber schneidet der kleine Rahmen zugleich die Tangenten der Höhen- oder Tiefen-Winkel und Hunderttheilchen jener Länge ab.

Bei der großen sächsischen Landesvermessung wandte man Visirlineale an, welche aus Birnbaumholz gefertigt und statt der Diopteren mit zwei messingenen Klingen versehen waren, die mit ihren Flächen den Kanten des Lineals parallel standen und demselben durch ein Gelenk verbunden, niedergelegt oder senkrecht aufgerichtet werden konnten, bei dieser Bewegung aber genau in der Vertikal-

ebene blieben. In ebenen Gegenden gebraucht man das Instrument so, daß man einen Schritt abwärts tritt und über die Spitzen der aufgerichteten Klingen visirt. Diese Art der Visirlineale kann aber nie bei genauen Bestimmungen angewendet werden, denn wegen des Flimmerns der Spitzen entsteht Undeutlichkeit und können parallactische Fehler einschleichen; sie haben aber auch ihre Vortheile in gebirgigten Gegenden, indem sie das Visiren nach hoch oder tief gelegenen Gegenständen verstatten. Im ersten Falle nämlich beugt man die Ocularklinge und visirt längs ihrer Schneide und der Spitze der Objectivklinge; im Falle aber, daß man nach einem in der Tiefe gelegenen Punkte visiren will, biegt man die letztere und visirt nun längs der Spitze des Oculars und der Schneide der Objectivklinge.

Aeltere Schriftsteller brachten in Vorschlag, an den oberen Enden der Diopter ein Pferdehaar zu befestigen, welches, wenn die Diopter senkrecht aufgestellt sind, so ausgespannt wäre, daß es mit den Mittellinien der Diopter und der Kante des Lineals in einer Vertikalebene läge. Durch diese Vorkehrung wollte man auch das Visiren nach hoch oder tief gelegenen Punkten erleichtern, indem man, um in die Tiefe zu visiren, sich nur überbeugen und das horizontale Pferdehaar mit dem im Objectiv-Diopter und dem Gegenstande in eine Ebene bringen durfte; bei einer Höhenvisirung hingegen sah man wie gewöhnlich durch die Visirlöcher des Oculars, brachte hingegen nicht das Haar des Objectivs, sondern das horizontal ausgespannte Haar mit dem Gegenstande zur Bedeckung.

Breithaupt schlägt in seiner Abhandlung: „Ueber den Gebrauch mathemat. u. geom. Instrumente" vor, den Raum zwischen beiden Diopteren äußerlich so zu verblenden, daß man durch einen dunklen Kanal visirt, wodurch allerdings die Genauigkeit erhöht werden dürfte, da wir das Object besser sehen können und also unser Lineal genauer einzurichten im Stande sind; dieser Vortheil ist indeß nur scheinbar, indem eben die äußere Verblendung auch verursacht, daß man den Bleistift zum Ziehen der Visirlinie sehr schief halten muß, wodurch noch mehr von der Genauigkeit verloren geht als gewonnen werden dürfte.

Eine Verbesserung der Diopter-Lineale, welche zweckmäßig befunden werden dürfte, wäre es, wenn man statt des einen Fadens am Objectiv-Diopter zwei Fäden genau senkrecht und gleich weit von der Mittellinie so anbrächte, daß nur der Gegenstand dadurch in der Mittellinie befunden würde, wenn man ihn zwischen beiden Fäden siehet. Man entgehet hiedurch den Fehlern, welche durch die Bedeckung des Fadens entspringen und bei sehr entfernten Gegenständen von Bedeutung sein können; das Auge aber muß zwischen den beiden Fäden genau die Mitte treffen, so daß wir nur den Gegenstand sehr genau schneiden können. Um zu untersuchen, ob die Fäden auch die verlangte Eigenschaft haben, daß sie gleich weit von der Mittellinie abstehen, visire man auf einen nicht zu entfernten Gegenstand und bringe ihn erst mit einem der beiden Fäden, nachmals aber, indem man das Lineal um einen festen Punkt drehet, mit dem andern Faden zur Bedeckung, die erhaltenen Visirlinien schneiden sich alsdann in dem Drehpunkt; man halbire den Winkel, welchen

sie einschließen, und lege das Lineal genau an diese Mittellinie an; sind die Fäden gehörig ausgespannt, so muß nun der Gegenstand genau in der Mitte zwischen beiden erscheinen.

5. Die Kippregel.

Da das Visiren nach hoch oder tief gelegenen Gegenständen durch das Diopter-Lineal entweder gar nicht verstattet wird oder mit Unbequemlichkeit verbunden ist, da man endlich durch dieses Werkzeug die Winkel, welche die Visirlinie mit der Wagrechten macht, nicht kennen lernt, so bedient man sich hiezu eines andern Werkzeugs, welches die Kippregel ist. Anstatt daß beim gewöhnlichen Diopter-Lineal die Absehen unmittelbar an das Lineal befestigt werden, hat man hier auf die Mitte des letztern eine Säule errichtet, welche an ihrem obern Ende einen Zapfen trägt, um welchen sich eine prismatische Stange, an deren Enden die Dioptern angebracht sind, drehen läßt. Diese Bewegung geschieht in einer auf der Fläche des Lineals senkrechten Ebene, so daß die Mittellinie der Dioptern und die Kante des Linials wiederum in jeder Stellung der Stange in einer Vertikalebene liegen. An der untern Seite der Stange ist ein Gradbogen befestigt, an welchem durch einen an der Säule befestigten Zeiger oder Nonius die Neigung der Stange gegen die Wagrechte, d. h. die Höhen- oder Tiefen-Winkel, angegeben werden.

Bei der Kippregel könnte man den im Vorherigen gegebenen Vorschlag Breithaupts mit einiger Abänderung in Anwendung bringen, indem man anstatt der Stange

mit

mit den Diopteern eine Röhre um den Zapfen drehen ließe, welche an dem Ocularende ein kleines Visirloch, am andern Ende aber ein Fadenkreuz erhalten müßte, von welchem der Durchschnitt, so wie das Visirloch, in der Achse der Röhre, der eine Faden aber genau in der Vertikalebene läge. Man wird hierdurch die angegebenen Vortheile erlangen, ohne den dort bemerkten Nachtheilen ausgesetzt zu sein.

6. Das Diopter-Fernrohr.

Die Anstrengung, mit welcher man beim Gebrauch des gewöhnlichen Diopter-Lineals und der oben beschriebenen Kippregel auf ferne, undeutlich erscheinende Gegenstände visiren muß, ist den Augen des Beobachters höchst nachtheilig und doch häufig nicht hinreichend, um mit der nöthigen Genauigkeit zu arbeiten; diesem Uebelstande hilft das Diopter-Fernrohr (Fig. 18) ab. Dasselbe hat ganz die nämliche Einrichtung wie die Kippregel, nur ist statt der prismatischen Stange ein Fernrohr a b in der Vertikalebene beweglich, welches die auf seiner äußeren Röhre befestigten Diopteern trägt. Auf der unteren Seite der Röhre ist ein Gradbogen angeschraubt, an welchem ein an der Säule befestigter Nonius c die Höhen- oder Tiefen-Winkel bis auf 2 Minuten angiebt. Im Mittelpunkte d des zu diesem Bogen gehörigen Kreises ist ein Zapfen angebracht, welcher, in den auf dem oberen Ende der Säule angebrachten Pfannenlagern ruhend, die Bewegung des Bogens und Rohrs erlaubt.

In dem Fernrohre ist entweder ein Fadenkreuz angebracht, welches aus Spinnenweben gefertigt wird, oder

ein planes Glas mit parallelen Oberflächen, worauf zwei sich senkrecht durchkreuzende Linien eingeätzt sind, so befestigt, daß der Durchschnitt dieser Fäden oder Linien genau in die Achse des Rohrs und eine derselben in die Vertikalebene durch die Kante des Lineals fällt. Durch das Fernrohr wird man nun auch entfernte Gegenstände ohne Anstrengung deutlich erblicken und mit Genauigkeit zur Bedeckung mit dem senkrechten Faden bringen können; durch die oberen Diopteren aber kann man alsdann zu noch größerer Sicherheit auch rückwärts visiren. Da aber auch auf die Verschiedenheit der Augen Rücksicht genommen werden muß, so ist das Ocularglas verschiebbar und hierzu die Röhre desselben mit einer Triebstange versehen, in welche ein durch den Knopf f zu bewegendes Getriebe eingreift, wodurch also jene Röhre aus der äußeren heraus- und zurückgeschoben wird. Gemeinhin wird hierzu ein zweigläseriges, ein verkehrtes Bild gebendes Fernrohr angewendet; da aber auch andere Fernröhre gewählt werden können und überhaupt der Feldmesser, welcher genau arbeiten will, häufig mit Fernröhren arbeiten muß, so wird hier eine kleine Uebersicht von der Construction und den Leistungen der üblichen Röhren nicht am unrechten Orte stehen, obwohl man sich nicht in optische Untersuchungen einlassen wird.

A. Das Kepplersche oder astronomische Fernrohr ist eigentlich für sehr entfernte Gegenstände eingerichtet, so daß die auf das Objectivglas fallenden Strahlen parallel angenommen werden. Die aus dem Ocular ins Auge gehenden Strahlen sollen ebenfalls parallel sein, indeß ist das Ocular verschiebbar, um die Strahlen dem

Weitsichtigen convergirend, dem Kurzsichtigen divergirend ins Auge bringen zu können. Beide Gläser sind erhaben (convex), und ihre eigentliche Entfernung, d. h. die angenommene Länge des Rohrs, der Summe beider Brennweiten gleich; das Bild des Gegenstandes erscheint dieser Construction nach verkehrt. Die Vergrößerung ist gleich dem Quotienten aus der Brennweite des Objectivs durch die des Oculars, und wird also um so größer, je größer erstere und je kleiner die letztere ist. Der Halbmesser des Gesichtsfeldes, d. h. die Tangente des halben Sehwinkels, unter welchem der Gegenstand, dessen Bild man auf einmal übersehen kann, aus der Mitte des Objectivs erscheinen würde, ist durch die Größe des Objectivs und die Vergrößerung bedingt.

B. Das Galiläische Fernrohr. Das Bild des Kepplerschen Rohrs soll aufrecht erscheinen, die Strahlen parallel aus dem Ocular kommen; dieser Aufgabe zu genügen, hat das Galiläische Fernrohr eine biconvexe Objectiv- und eine biconcave Ocularlinse nöthig. Um bei dieser Zusammenstellung ein genügend großes Gesichtsfeld zu erhalten, bedarf man eines großen Objectivglases, welches aber durch andere, Undeutlichkeit verursachende Umstände, als Farbenzerstreuung u. s. w., beschränkt wird. Es hat dieses Rohr übrigens dieselbe Vergrößerung wie das astronomische bei gleichen Brennweiten der Linsen, und ist um die doppelte Brennweite des Oculars kürzer als jenes, welcher letztere Umstand es besonders zum Gebrauch als Operngucker bequem macht.

C. Das terrestrische Fernrohr (Erd-Fernrohr) mit drei Gläsern. Soll ein Fernrohr mit drei Gläsern

dieselbe Vergrößerung geben, wie ein astronomisches unter gleichen Bedingungen giebt, so muß es aus lauter biconvexen Linsen zusammengesetzt sein, und ist um das Vierfache der Brennweite des mittlern Glases länger als jenes; das Bild erscheint aufrecht.

D. Das terrestrische Fernrohr mit vier Gläsern, welches eine eben solche Vergrößerung und ebenfalls ein aufrechtes Bild geben soll, hat auch lauter biconvexe Linsen; die Länge des Rohrs ist aber nicht bestimmt, da die Entfernung der beiden mittleren Gläser von einander einen Spielraum erlaubt, welcher jedoch durch andere einwirkende Gründe begränzt wird. Diese Einrichtung haben die meisten Taschen-Fernröhre.

Alle diese genannten Fernröhre geben wegen der Zerlegung des Lichtes in die prismatischen Farben beim Durchgange desselben durch die Glaslinsen mehrere auf der Achse des Rohrs senkrecht stehende und nach einem bestimmten Gesetz gegen das Ocular zu wachsende Bilder; von allen erhält das Auge die parallel aus der Ocularlinse kommenden Strahlen, mithin in der Mitte ein Gemisch von allen Farben, am Rande aber nur einzeln farbigte. Jenes Gemisch wirkt auf das Auge eben so wie das gewöhnliche ungetheilte Licht, und wir sehen demnach hier das Bild in seinem wahren Lichte, aber mit einem farbigen, gemeinhin rothen oder blauen Rande umgeben, je nachdem, wegen Beschaffenheit und Stellung der Gläser, das rothe oder blaue Bild dem Ocular zunächst stand. Diese Ränder aber verursachen Undeutlichkeit des wahren Bildes. — Der Engländer Dollond erfand 1756 das Mittel, diese Ränder zu heben, indem er die Objectiv-

linsen aus mehreren Theilen zusammensetzte, wie (Fig. 18 a und Fig. 18 b) es zeigen, zu welchen einzelnen Theilen er verschiedene Glasarten, nämlich Crownglas (grünes Fensterglas) und Flintglas (englisches Kristallglas) nahm. Fernröhre mit dergleichen Objectivlinsen, welche wegen der größeren Deutlichkeit für die Meßwerkzeuge besonders anwendbar sind, heißen achromatische, oder nach ihrem Erfinder: Dollondsche Fernröhre.

Die Vergrößerung, welche ein Fernrohr giebt, lernt man auf eine leichte, jedoch nicht genaue Art dadurch kennen, daß man das Rohr auf einen gut zu übersehenden Gegenstand richtet, z. B. nach kleinen Fensterscheiben oder nach den gegenüber liegenden Ziegeln eines Daches, und diesen Gegenstand mit dem einen Auge durch das Rohr, mit dem andern frei durch die Luft betrachtet, dann aber einen Vergleich zwischen beiden Bildern anstellt.

Auf eine mathematisch genaue Art giebt aber die Vergrößerung eines Rohrs, von welchem man die Oeffnung der Objectivlinse kennt, der Dynameter oder Cazometer von Ramsdens Erfindung an. Wenn man ein Fernrohr auf einen entfernten Gegenstand so richtet, daß das Bild desselben deutlich erscheint, so wird sich auf dem Ocularglase auch das Bild des Objectivs in der Gestalt eines halben Kreises entwerfen. Auf optischen Gründen beruhet nunmehr die Wahrheit, daß der Quotient aus dem Halbmesser des Objectivs durch den Halbmesser seines Bildes auf dem Ocular die Vergrößerungszahl des Rohrs giebt. — Der Dynameter besteht aus einer Loupe, welche in einer Röhre verschiebbar ist; der Fuß dieser Röhre ist eine durchsichtige Platte, gemeinhin von Horn,

welcher man eine bestimmte Größe, etwa 0,5″ Durchmesser giebt; diese wird durch Parallelen etwa in 50 gleiche Theile, mithin nach obiger Annahme in Hunderttheilchen des Zolls zerlegt. Hält man diesen Dynameter nunmehr vor das Ocular und stellt die Loupe so, wie es das Auge des Beobachters erfordert, so kann man die Größe des halben Kreises bis auf Hunderttheilchen ablesen und bis auf 0,02″ und 0,03″ schätzen, somit aber durch obige leichte Rechnung die Vergrößerungszahl erhalten.

Die bisher angeführten Werkzeuge waren, wie gesagt, mehr oder minder nothwendig beim Gebrauche des Meßtisches selbst; einige andere, als Schmalkalders Höhenmesser, sind bei der Anwendung des Meßtisches nicht unmittelbar nothwendig, aber doch zum genauen Arbeiten nach Lehmann's Messungsmethode vorzüglich zu empfehlen, weshalb wir hier die Beschreibung des genannten Werkzeugs und, wegen ihrer Nothwendigkeit beim Auftragen gemessener Figuren, auch noch das Nöthige über die Transversal-Maaßstäbe und den Stangenzirkel geben wollen.

Schmalkalders Höhenmesser.

Obgleich dieses Werkzeug nur die Winkel von Grad zu Grad angiebt, so ist dies doch für die ökonomischen und gewöhnlichen militairischen Aufnahmen, ja selbst für genaue topographische Messungen hinlänglich, und daher das Instrument bei letzteren, so wie zum Unterricht nach der Lehmannschen Methode, vorzüglich bei Legung der Horizontalen anzuwenden, und endlich zur Bestimmung

der Neigungswinkel der Bergflächen und der überhöhenden Terrainpunkte zu gebrauchen. Die Einrichtung desselben ist folgende: Eine cylindrische Büchse (Fig. 19, A) von etwa $2\frac{1}{2}''$ Durchmesser und $\frac{3}{4}''$ Höhe ist mit einem Ocular-Diopter a und einem Objectiv-Diopter b versehen; an dem ersteren befindet sich in einem messingeuen Gehäuse ein rechtwinkliches Glasprisma. Die äußere Fläche dieses Prisma, deren Querschnitt durch die Hypothenuse r s (Fig. 19. C) angegeben ist, wird mit einem schwarzen Pigment bedeckt und schneidet die an dem Diopter selbst anliegende Fläche s t unter einem Winkel von 45°; die untere Fläche r t endlich ist convex geschliffen. Durch diese Einrichtung ist die Seite r t zum Vergrößerungsglase, die r s zum Spiegel geworden, und die Strahlen, welche von einem leuchtenden Punkt p auf die Fläche r t fallen, und nach der durch die Convexität derselben bestimmten Art gebrochen, auf r s treffen, werden von dort unter gleichem Reflectionswinkel von 45° abgestoßen und dem Auge, welches in g hinter dem im Diopter angebrachten Einschnitt stehet, das vergrößerte Bild des Gegenstandes geben. — Da der erwähnte im Diopter angebrachte Einschnitt m n (Fig. 19, B) aber über das Prisma hinaus gehet, so kann das Auge nicht allein jenes Bild, sondern auch den Faden des Objectiv-Diopters gleichzeitig übersehen.

In dieser Büchse bewegt sich nun ein Gradring d um seinen Mittelpunkt C, welcher mit ihm durch mehrere Speichen verbunden ist, und sich um eine senkrecht auf dem Mittelpunkt des Bodens der Büchse stehenden Achse drehet. An diesem Gradringe ist ein Gewicht g

so angebracht, daß dasselbe genau senkrecht auf den durch den Nullpunkt der Eintheilung gehenden Durchmesser ef wirkt. Hält man nun die Büchse so, daß der Boden derselben vertikal stehet, so wird wegen jenes Gewichtes der Halbmesser gc die Richtung der Schwere angeben, d. h. vertikal stehen und also der Durchmesser ef in die horizontale Lage gebracht werden. Drehet man nun die Büchse beliebig so, daß man einen gewählten Gegenstand durch den Faden des Objectiv-Diopters gedeckt siehet, so wird man zugleich im Prismaspiegel irgend eine auf dem eingetheilten Ringe befindliche Gradzahl erblicken, deren zugehöriger Theilstrich mit der Mittellinie der Diopteru, dem gewählten Gegenstande und dem Mittelpunkt des Ringes in einer Ebene liegt, deren Neigung gegen die Horizontale aber durch den Bogen, dessen Gradzahl man erblickt, gemessen wird.

Um zu verhindern, daß der Gradring durch das Gewicht g verbogen werde, wenn das Werkzeug außer Gebrauch auf dem Boden der Büchse stehet, hat man eine Schraube h so angebracht, daß man sie in das Gewicht selbst hineinschrauben, dasselbe also unterstützen, mithin seine Schwere nicht auf den Ring lasten kann. Um das oft sehr langweilige Schwingen des Ringes beim Visiren abzukürzen, ist ferner eine Feder k so an der Wand der Büchse befestigt, daß man sie mittelst des Kopfes l gegen den Ring drücken kann, dadurch die Bewegung desselben hemmen und ihn nun leichter in seine gehörige Lage bringen kann.

Die Transversal-Maaßstäbe.

Um auf dem Papier eine Figur zu entwerfen, welche einer in der Wirklichkeit vorhandenen gleich oder ähnlich sein soll, braucht man Maaße, durch welche man im Stande ist, den verschiedenen Linien der Zeichnung die verlangte gleiche Länge oder eine der wirklichen proportionale Ausdehnung zu geben. Man theilt diese Maaßstäbe, je nachdem entweder eine wirklich gangbare Maaßeinheit in ihre kleinere Theile zerfällt und diese als solche betrachtet werden, oder irgend einem aliquoten Theil einer solchen Maaßeinheit ein willkührlicher Werth beigelegt wird, in natürliche oder verjüngte Maaßstäbe. Setzen wir z. B. fest, daß bei einer Zeichnung die Länge von 1 dc″ so viel bedeuten solle als 100 Ruthen auf dem Felde, so wird, wenn man den Zoll in seine Zehntel, Hunderttheile und Tausendtheile durch Construction zerlegt, auch $1'' = 100^0$; $0{,}1'' = 10^0$; $0{,}01'' = 1^0$ und $0{,}001'' = 1'$ sein müssen, und dieser Maaßstab ein verjüngter Ruthen-Maaßstab genannt werden. — Ueberhaupt ist klar, daß wenn für eine Länge von m wirklichen Maaßeinheiten bei der Verzeichnung nur n solcher Einheiten angenommen werden, die Längenmaaße auf dem Bilde sich zu den auf dem Felde wie $n : m = 1 : \frac{m}{n}$ verhalten und also auch die Fläche des Bildes zu dem Flächeninhalt der dadurch vorgestellten Landstrecke $= n^2 : m^2 = 1 : \frac{m^2}{n^2}$. Durch welche einfache Formeln man nunmehr im Stande ist, für jedes angenommene Maaß, welches ein aliquoter Theil des wirklichen Maaßes ist, die

Verjüngung des Bildes leicht zu berechnen. Bei dem oben gegebenen Beispiele würde demnach für $n = 1''$ und $m = 100^0 = 10000''$, auch

das Verjüngungs-Verhältniß der Längen, 1 : 10000; das der Flächen, $1 : (10000)^2$; das Maaß selbst also der $\frac{1}{10000}$ Theil des wirklichen Maaßes.

Es leuchtet ein, daß auf die Wahl des verjüngten Maaßstabes bei Entwerfung einer Charte viel ankömmt, da, wenn die Einheit zu groß angenommen, die Charte sich ungebührlich weit ausdehnen würde, im entgegengesetzten Falle aber die Einzelnheiten zu klein und verschwindend werden müssen. Es sollen daher hier einige von den bei ökonomischen und militairischen Aufnahmen gebräuchlichen Verjüngungen angeführt werden.

Das Königl. Preuß. Feldmesser-Reglement setzt fest, daß bei ökonomischen Aufnahmen der gewählte Maaßstab 50 Ruthen auf einen Zoll Decimalmaaß betragen soll; hier ist also:

$$1'' = 50^0;\quad 0{,}1'' = 5^0;\quad 0{,}01'' = 5';$$

ferner

das Verjüngungsverhältniß der Längen 1 : 5000, jenes der Flächen $1 : (5000)^2$, das Maaß endlich der fünftausendste Theil des wirklichen Maaßes.

Beim Königl. Preuß. Generalstabe hat man folgende Maaße:

1) $8'' = 1$ Meile $= 2000^0 = 10000$ Schritt, mithin ist hier:

$$0{,}8'' = 1000 \text{ Schritt} = 200^0;\quad 0{,}4'' = 100^0;$$
$$0{,}04'' = 10^0;\quad 0{,}01'' = 25'$$

das Verjüngungs-Verhältniß der Längen = 1 : 25000,

das der Flächen $= 1 : (25000)^2$; das Maaß ist $\frac{1}{25000}$ des wirklichen.

2) $4'' = 1$ Meile $= 2000^0 = 10000$ Schritt, mithin

$0{,}4'' = 1000$ Schritt $= 200^0$ und $0{,}2'' = 100^0$; $0{,}02'' = 10^0$; $0{,}01'' = 5^0$.

Das Verjüngungs-Verhältniß der Längen $= 1 : 50000$; jenes der Flächen $= 1 : (50000)^2$, das Maaß ist $\frac{1}{50000}$ des wirklichen Maaßes.

3) $1\frac{1}{3}'' = 1$ Meile $= 2000^0 = 10000$ Schritt; demnach

$0{,}133''\ldots = 1000$ Schritt $= 200^0$; $0{,}066''\ldots = 100^0$; $0{,}01'' = 15^0$.

Das Verjüngungs-Verhältniß der Längen $= 1 : 150000$; das der Flächen $= 1 : (150000)^2$; das Maaß aber $\frac{1}{150000}$ des wirklichen.

Lehmann giebt in seiner Anweisung zur Situationszeichnung als zweckmäßige Verjüngungen die folgenden an:

1) Zur Zeichnung einer Generalcharte den Maaßstab zu $\frac{1}{2000000}$ des wirklichen Maaßes; hier ist also

$1'' = 10$ Meilen; $0{,}1'' = 1$ Meile; $0{,}01'' = 200^0$.

2) Zur chorographischen oder Specialcharte den Maaßstab $\frac{1}{200000}$, mithin

$1'' = 1$ Meile; $0{,}1'' = 200^0$; $0{,}01'' = 20^0$.

3) Zur topographischen Charte den Maaßstab $\frac{1}{100000}$ und also:

$1'' = 2$ Meilen; $0{,}1'' = 100^0$; $0{,}01'' = 10^0$.

4) Zur speciellen topographischen Charte den Maaßstab $\frac{1}{120000}$, mithin

$10'' = 1$ Meile; $1'' = 200^0$; $0{,}1'' = 20^0$; $0{,}01'' = 2^0$.

5) Bei ökonomischen Zeichnungen den Maaßstab $\frac{1}{10000}$ und folglich:

$1'' = 100^0$; $0{,}1'' = 10^0$; $0{,}01'' = 1^0$.

Für den Unterricht, besonders bei der Lehmannschen Methode, eignet sich vorzüglich der Maaßstab von $\frac{1}{12500}$; hier ist also:

$16'' = 1$ Meile; $1'' = 125^0$; $0{,}1'' = 12^05'$; $0{,}01'' = 1^02'5''$.

Bei militairischen Aufnahmen darf aber im Allgemeinen das Verhältniß zwischen den zur Zeichnung gewählten Maaßen und denen auf dem wirklichen Boden gebrauchten nie unter 1 : 100000 und nie über 1 : 10000 betragen, da sonst die vorhin angegebenen Mängel eintreten würden.

Da die Maaßstäbe, welche man in Reißzeugen u. s. w. findet, gemeinhin auf Metall oder Holz gefertigt sind, aber fast nie die gehörige Genauigkeit besitzen, und selten gerade für den Fall, in welchem man sie benutzen will, passen, beim Gebrauch aber auch sehr leicht durch die Zirkelspitzen verletzt und unrichtig werden, eben so aber auch die Zirkelspitzen abstumpfen, so ist es nöthig, selbst die nöthigen Maaßstäbe anfertigen zu können, weshalb hier eine zweckmäßige Methode dieser Anfertigung angegeben werden soll.

Auf ein ebenes Brettchen von trockenem Birnbaumholz leimt man einen Streifen gutes, fehlerfreies Papier. Hierauf ziehet man mit Blei eine feine Linie ab (Fig. 20), welche man etwas länger macht als der Maaßstab selbst werden soll. In den Endpunkten a, b errichtet man die senkrechten ac, bd, und trägt auf dieselben eine willkührlich angenommene Länge zehnmal auf, verbindet als-

dann die hierdurch bestimmten Endpunkte c, d, ebenfalls durch eine feine Linie. Nunmehr trägt man eine ebenfalls beliebige Länge auf a b und c d von a und c aus nach f und g, und von diesen Punkten nunmehr auf denselben Linien eine bestimmte Anzahl von Zollen, je nachdem man die Länge des Maaßstabes bestimmt hat, wodurch die Endpunkte h und k bestimmt werden. Die gewählte Anzahl von Zollen nimmt man von einem als genau anerkannten Maaße ab und trägt sie auf einmal ab, da durch das Auftragen eines Zolles und mehrmaliges Umschlagen dieser Länge Fehler unvermeidlich sind; auch ist es zweckmäßig, eine solche Anzahl von Zollen zu wählen, welche eine Potenz der Zwei ist, als 4, 8, ..., weil man alsdann durch fortgesetztes Halbtheilen, also auf die mathematisch genaueste Art die einzelnen Zolle bestimmen kann, welches nunmehr geschieht, und wodurch im vorliegenden Falle, wo 4 Zoll gewählt werden, die Theilpunkte i, o, p und l, m, n bestimmt werden. Nunmehr können die Linien f h, g k, g f, i l, o m, n p, h k durch feine Tuschlinien ausgezogen werden, doch wird man die möglichste Genauigkeit dabei beobachten müssen.

Um nun die Theile des Zolles zu erhalten, nämlich die Zehntel und Hunderttheilchen, welche gemeinhin nur verlangt werden, so würde man die erstern durch eine Diagonale n k erhalten können, wenn man die auf der Senkrechten c a, b d bemerkten Punkte nur durch Linien $1 . 1''$; $2 . 2''$; $3 . 3''$ u. s. w. verbindet, welche nur bis zu den Linien f g, h k ausgezogen werden; denn offenbar ist in den ähnlichen Dreiecken n h k und $1'' x k$ auch

$$nh : x1'' = kh : k1'' = 10 : 1,$$

und also $x1'' = \frac{nh}{10} = \frac{1''}{10}$

und also $nh : z6'' = kh : k6'' = 10 : 6$

und $z6'' = \frac{nh \,.\, 6}{10} = \frac{6''}{10}$.

Man würde demnach, so wie die Zahlen bei den Parallellinien beigesetzt sind, 1, 2 ... Zehntel von dem Maaßstabe abnehmen können. Um aber auch die Hunderttheile zu bestimmen, wird man nunmehr die Linie fl, gi des links gelegenen Zolles durch Construction in zehn gleiche Theile zerlegen müssen. Schon aus dem Vorherigen ergiebt sich eine solche Construction, denn man dürfte nur eine Diagonale wie dort die nk ziehen, und durch die Durchschnittspunkte mit den Parallelen, Senkrechte, mit der gf parallel laufende Linien ziehen, wodurch sich auf gi und fl die Theilpunkte bestimmen würden; allein noch genauer wird man verfahren können, wenn man von l auf der Grundlinie noch eine Weite $z6'' = \frac{6''}{10}$ nach r auftrüge, so daß also $fr = \frac{16''}{10} - \frac{2''}{10}$, mithin durch fortgesetztes Halbtheilen die einzelnen Theilpunkte zu bestimmen wären. Ob die Länge fr auch genau $\frac{16''}{10}$ enthalte, würde man bei einem Maaßstabe, auf welchen man 8″ aufgetragen hätte, genau dadurch prüfen, daß, wenn man diese Größe 5mal aufsetzt, sie gerade 8″ betragen muß, da $5 \cdot \frac{16''}{10} = 8''$. Bei einem Maaßstabe von 4″ würde man eine ähnliche Prüfung vornehmen können, wie in der Folge deutlich wird, wenn wir von dem Abnehmen der Maaße sprechen werden. Hat man nun die Theilpunkte genau bestimmt, so bezeichnet man, wie die

Figur es lehrt, auf der ebenen Linie gi von der Rechten zur Linken die Punkte mit den Ziffern 1, 2 .... und verbindet alsdann die Punkte 9 mit f, 8 mit 9, 7 mit 8' u. s. w. durch schiefe Linien, welche aber Transversal-linien heißen, und dem Maaßstabe den Namen: Trans-versal-Maaßstab beilegen.

Wir erkennen nun leicht, daß die Länge yt (wo y den Durchschnitt der Parallele 4.4 mit der Transversale 3.4, und t den Durchschnittder Parallele 4.4 mit der Senkrechten il angiebt) genau $\frac{34}{100}''$ betragen muß; denn, da Δ tiu ∞ Δ li1', so ist:

$$tu : l1' = it : il, \text{ und da } l1' = \frac{1}{10}'', \text{ so ist auch}$$

$$tu : \frac{1}{10}'' = 4 : 10, \text{ mithin } tu = \frac{4}{100}''.$$

Es ist aber $uy = i3 = \frac{3}{10}'' = \frac{30}{100}''$, mithin

$$yt = yu + ut = \frac{30}{100} + \frac{4}{100} = \frac{34}{100}''.$$

Eben so ist wq, d. h. die Länge auf der 8ten Parallele von dem Durchschnitt mit der Senkrechten il bis zum Durchschnitt mit der Transversalen 78', offenbar $= \frac{78}{100}''$ denn es läßt sich eben so wie vorhin erweisen, daß $qs = \frac{8}{100}''$ und $sw = \frac{7}{10}''$, mithin $qw = \frac{78}{100}''$ ist. So giebt also die Zahl, welche oben stehet, zwischen g und i die Zehntel, die zwischen g und f stehende Zahl aber die Hunderttheile des Zolles an, welche das Stück der durch letztere Zahl bezeichneten Parallele von ihrem Durchschnitt mit der il, bis zum Durchschnitt mit der durch die erste Zahl benannten Transversale enthält, und es wird nun leicht sein, von einem Maaßstabe, dessen Verjüngungs-Ver-

hältniß man kennt, jede verlangte Länge abzunehmen, und eben so die Größe gegebener Linien darnach zu bestimmen.

Soll z. B. von einem Maaßstab, dessen Verjüngungs-Verhältniß wie 1: 25000 ist, die Länge von $612^0\ 5'$ abgenommen werden, so weiß man, daß $1'' = 250^0$; $0{,}1'' = 25^0$; $0{,}01'' = 2^0\ 5'$ sind; man wird demnach die eine Zirkelspitze in A setzen und mit der andern bis B, den Durchschnitt der Parallele 5 und der Transversale durch 4 ausgreifen: denn es ist $A\alpha = 2'' = 500^0$; $B\beta = i4 = \frac{4}{10}'' = 100^0$; $\alpha\beta = \frac{5}{100}'' = 12^0\ 5'$, mithin $AB = 2'' + \frac{4}{10}'' + \frac{5}{100}'' = 612^0\ 5'$.

Wäre dagegen irgend eine Linie gegeben, welche nach dem Verjüngungs-Verhältniß 1 : 5000 bestimmt ist und nun gemessen werden sollte, so nehme man sie mit dem Zirkel ab und sehe zu, in welchen Punkt irgend einer Transversale sie genau passe, wenn man mit der einen Zirkelspitze längs irgend einer der Senkrechten, welche so weit zurück liegt, daß die andere in der Transversale bleibt, so herabfährt, daß beide Spitzen immer auf denselben oder zwischen einerlei Parallelen bleiben. Man fände z. B., daß die gegebene Linie genau die Länge DC habe, so weiß man, daß nach dem angegebenen Verhältniß hier $1'' = 50^0$; $0{,}1'' = 5^0$; $0{,}01'' = 5'$ ist; mithin finden wir hier: $D\vartheta = 3'' = 150^0$; $C\delta = i6 = \frac{6}{10}'' = 30^0$; $\vartheta\delta$ wegen der zweiten Parallele $= \frac{2}{100}'' = 10' = 1^0$, mithin die Länge der Linie $= CD = 181^0$. Aehnlich wird man in andern Fällen verfahren, und wenn Größen abgenommen werden sollen oder Linien zu bestimmen sind, welche nicht

genau

genau durch die Durchschnittspunkte bestimmt werden können, wird man zwischen den Parallelen und den Transversalen bleiben und, bedenkend, daß durch ähnliche Construction hier die Tausendtheilchen des Zolls erhalten werden könnten, durch Schätzung die kleinen Größen zu bestimmen im Stande sein.

Der Stangenzirkel.

Zur Abnahme und Messung größerer Weiten können wir uns des gewöhnlichen Handzirkels nicht bedienen, theils weil die ihm zu gebende Oeffnung nicht hinreicht, theils weil die schiefe Stellung seiner Arme nicht die Genauigkeit zuläßt, welche nöthig ist. Wir bedienen uns daher in diesen Fällen eines andern Instruments, des Stangenzirkels, so wie überhaupt die Anwendung desselben bei jeder Abnahme von Weiten, welche wir öfter auftragen wollen, vorzuziehen ist, da auch hiezu, seiner leichten Verschiebbarkeit wegen, der gewöhnliche Handzirkel nicht tauglich ist. Eine prismatische Stange, ab (Fig. 21, A), drei-, vier- oder fünfseitig, bei sehr großen Zirkeln auch wohl aus Holz gefertigt, ist der Haupttheil dieses Werkzeugs. Zwei metallene Hülsen, c, d, genau der Stange gemäß geformt, sind auf derselben verschiebbar, doch ohne bedeutenden Spielraum zu haben, damit sie nur eine Bewegung längs der Stange erhalten, sich aber nicht zur Seite verschieben können, wozu die fünfseitige Form der Stange vorzüglich empfehlenswerth ist. An beiden Hülsen sind kleine Ansätze, in welche die fein polirten, genau gleichförmigen Stahlspitzen f, g so eingeschraubt werden, daß sie zur Stange senkrecht stehen;

oberhalb sind dagegen kleine Druckschrauben h angebracht, welche die Hülsen und mit ihnen die Spitzen in der gegebenen Lage festhalten. Außer dieser groberen Bewegung, welche den Spitzen durch die Hand gegeben wird, pflegt man einer derselben eine feinere zu ertheilen, indem mit der Hülse eine Mikrometer-Schraube, d. h. eine Schraube, durch welche dieselbe um einen äußerst geringen Theil vor- oder zurückgeschoben werden kann, verbunden wird, wodurch also bestimmte Weiten auf das genaueste abgenommen werden können.

Entweder läßt man das eine Ende der Stange in eine freie Schraube k auslaufen, und eine Schraubenmutter, welche durch Arme m, die über ihren Rand eingreifen, mit der Hülse verbunden ist, sich um selbige drehen, oder man durchbricht die Stange (Fig. 21, B) und macht sie selbst zur Mutter, in welcher sich dann die Mikrometer-Schraube k, welche auf gleiche Art mit der Hülse in Verbindung gesetzt ist, einschrauben läßt. Eine solche Schraube kann nun auch dazu benutzt werden, die Spitze um bestimmte Größen zu verrücken, welche zu klein sind, als daß sie von einem Maaßstabe mit Genauigkeit abgenommen werden könnten. Zu dem Ende bringt man auf dem einen, über die Schrauben-Mutter, wenn diese, oder über den Schraubenkopf, wenn die Schraube selbst gedreht wird, greifenden Arm einen feinen Strich i an, welcher als Index dient, und giebt nun der Mutter n u. s. w. eine kreisförmige Scheibe, welche auf ihrem äußeren Rande in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile getheilt ist, so daß man den Theil der Umdrehung kennt, welchen die Schraube macht, um

einen andern Theilstrich unter den Index zu bringen. Kennt man nun die Größe, um welche die Spitze durch eine solche Drehung verrückt wird, so kann man sie sehr genau um kleine Theile, welche man sonst nicht angeben könnte, einrichten. Um nun zu erfahren, wie groß der Werth einer Umdrehung in Rücksicht der betreffenden Weite ist, stellt man die Schraube so, daß der Nullpunkt der eingetheilten Scheibe genau mit dem Index zusammen trifft. Schraubt man nun die andere Spitze in einer beliebigen Weite fest und sieht auf einem genau befundenen Maaßstabe nach, wie viel diese Weite zwischen beiden Spitzen beträgt, löset nun die Druckschraube der mit dem Mikrometer verbundenen Hülse und giebt der Mikrometer-Schraube eine bestimmte Anzahl Umdrehungen, bestimmt alsdann nach jenem Maaßstabe die nunmehrige Entfernung der Spitzen von einander; so läßt sich leicht darthun, wie viel von dem erhaltenen Unterschiede auf jede Umdrehung kömmt, d. h. um wie viel die Spitze bei jeder Umdrehung verschoben wurde.

Gesetzt, man fände die erste willkührliche Weite $= 5{,}22''$ und die, welche man nach 10 Umdrehungen der Schraube fand, betrüge: $5{,}345''$, so ist offenbar:

$$\frac{5{,}345'' - 5{,}22''}{10} = \frac{0{,}125''}{10} = 0{,}0125''$$ der Werth einer Umdrehung.

Hiernach kann man nun leicht berechnen, wie viele Umdrehungen verlangt werden, um die Spitze um einen Zoll oder einen aliquoten Theil desselben zu verschieben. So wird bei der vorigen Annahme: $0{,}0125'' : 1$ Umdrehung $= 0{,}01'' : x$ Umdrehungen, und also:

$$x = \frac{0{,}01''}{0{,}0125} = \frac{100}{125} = 0{,}8;$$

d. h. es verlangt $\frac{8}{10}$ Umdrehung der Schraube, um die Spitze um 1 Hunderttheil Zoll fortzubewegen, und man wird auf gleiche Weise, wenn man den Rand nicht bloß in Zehntel, sondern noch mehr theilt, auch die Tausendtheilchen des Zolles u. s. w. mit Genauigkeit bestimmen können.

Daß eine gleichförmige Bewegung der Spitzen zu solchen Messungen erforderlich sei, bedarf wohl kaum einer Erwähnung, so wie es einleuchtend ist, daß ein lockerer Gang der Mikrometer-Schraube ein Fehler ist, welcher das Werkzeug unbrauchbar macht.

Um nun eine bestimmte Weite zu messen, nehme man sie mit dem Zirkel ab und sehe auf dem Maaßstabe nach, wie viel dieselbe beträgt. Man finde sie z. B. größer als 6,25″ und kleiner als 6,26″; man drehe nun die Micrometer-Schraube so oft herum, bis die Weite genau 6,25″ beträgt, und zähle die dazu nöthigen Umdrehungen oder Theile derselben. Man habe z. B. 0,45 Umdrehung gemacht, so ist klar, daß bei der obigen Annahme die ganze Weite:

$$6{,}25'' + \frac{0{,}45 \times 0{,}01''}{0{,}8} = 6{,}25'' + 0{,}005625'' = 6{,}255625''$$

beträgt.

Wenn ferner eine durch Rechnung u. s. w. bestimmte Weite von einem um ein Hunderttheilchen des Zolles eingetheilten Maaßstabe abgenommen werden soll, wird man auf ähnliche Weise die Hunderttheilchen abnehmen und die kleineren durch Umdrehungen bestimmen; sei z. B. die Weite von 5,78775″ abgenommen worden, so

wird man 5,78″ vom Maaßstabe abnehmen können, die fehlenden 0,00775″ aber durch Umdrehungen bestimmen müssen. Es ist aber 0,01″ : 0,8 Umdrehung = 0,00775″ : x Umdrehungen und

$$x = \frac{0{,}8 \times 0{,}00775}{0{,}01} = \frac{0{,}006200}{0{,}01} = 0{,}62 \text{ Umdrehung;}$$

d. h. man muß die Schraube noch 0,62 mal umdrehen, um zu der abgenommenen Weite die fehlenden Theilchen hinzuzufügen.

Dergleichen genaue Bestimmungen können indeß nur dann möglichst vollkommen ausgeführt werden, wenn man an beiden Spitzen des Zirkels kleine Loupen angebracht hat, welches mittelst kleiner, durch ein Gelenk an der Hülse befestigten Arme, die einen Ring halten, in welchen die Lupe gesteckt wird, zu bewirken ist.

Diese, so wie die in der Folge beschriebenen, Werkzeuge erbiete ich mich gern Auswärtigen gut und fehlerfrei zu besorgen, wenn man sich deshalb in portofreien Briefen, mit Beilegung der Hälfte des Betrags, an mich wendet.

Dritter Abschnitt.

Von der Wahl, dem Abstecken und Messen der Standlinie.

Jeder Aufnahme liegt der Hauptzweck zum Grunde: die Lage der auf der betreffenden Strecke der Erdoberfläche befindlichen Punkte gegen einander zu bestimmen, und hiernach ein Bild dieser Landstrecke, eine Charte, zu entwerfen; den einzelnen Aufnahmen aber können noch mannigfach andere Zwecke beigegeben werden, sie können aus rein wissenschaftlichem, militairischem, ökonomischem Interesse unternommen werden, sie können sich auf die Bestimmung einzelner Punkte beschränken, welche als Grundlage zu künftigen Vermessungen dienen sollen, sie können sich aber auch mit den Einzelnheiten allein beschäftigen. Hierdurch aber werden die Operationen, um zu jenem Hauptzweck zu gelangen, die Genauigkeit, welche verlangt wird u. s. w. modulirt, wobei denn auch besonders Zeit und Kosten, welche mehr oder minder geschont werden sollen, die Art des Aufnehmens, die Wahl der Werkzeuge u. s. w. zu bestimmen. Die Pflicht des Geometers bleibt es aber, der, mit den gewählten Werkzeugen, zu verlangenden Genauigkeit auch möglichst nahe zu kommen.

Der Meßtisch eignet sich nicht zu Aufnahmen, welche in rein wissenschaftlicher Hinsicht unternommen werden, er eignet sich nicht zu Bestimmungen solcher Punkte, welche nachmals zur Grundlage bei Vermessungen ganzer Länder dienen sollen; wohl aber hat sich seine Anwendbarkeit, vorausgesetzt bei einer zweckmäßigen Behandlung, zu den Bestimmungen der Details, zu ökonomischen und einzelnen militairischen Aufnahmen bewährt, bei denen nicht eine so strenge Genauigkeit verlangt wird, wie denn so das Königl. Preuß. Feldmesser-Reglement vom 29sten April 1813 im Längenmaaß einen Fehler von 0,003 der ganzen Länge, und beim Flächeninhalt eines Grundstücks von 1—500 Morgen, einen Fehler, welcher den 90sten bei einem Inhalt von 500—1000 Morgen, einen Fehler, welcher beinahe den 98sten Theil des Ganzen beträgt, für zulässig erklärt, welche Fehler beim Meßtisch nur durch Fahrläßigkeit zu dieser Größe anwachsen dürften. — Bei dieser Abhandlung, welche nur das mit dem Meßtisch zu beobachtende Verfahren betreffen soll, werden wir uns aus diesen Gründen auch nur beim Messen der geraden Linien auf die Werkzeuge und Methoden beschränken, welche dem vorliegenden Zwecke entsprechen und den gehörigen Grad der Genauigkeit gewähren, ohne zu großen Kosten- und Zeitaufwand zu verlangen.

Wir betrachten die zu bestimmenden Punkte auf dem Erdboden als Winkelpunkte geometrischer Figuren, suchen so viel Angaben zu erhalten, als nach den Lehren der Geometrie zur Bestimmung der Figur erforderlich sind, und finden dann die fehlenden Stücke durch Rechnung oder Construction. Es liegen aber jene Punkte

nicht in einer Ebene, welches die Geometrie bei allen ihren Bestimmungen voraussetzt, wir müssen sie demnach auf irgend eine Ebene projiciren und die Projections-Puncte als die wahren ansehen, von der Projections-Ebene das Bild entwerfen, den Abstand der nämlichen Punkte aber von dieser Ebene durch Zeichnung andeuten, worin eben die Lehmannische Methode, welche hier abgehandelt werden soll, den Vorzug vor allen bisher bekannten verdient.

Man hat allgemein die Horizontal-Ebene, als die am leichtesten zu bestimmende, zu der erwähnten Projections-Ebene gewählt; da wir aber auf dieser imaginairen Ebene nicht unmittelbar messen können, so müssen wir uns begnügen, die Abmessungen, so wie sie sich uns bieten, zu nehmen und durch Zeichnung auf jene Ebene zu reduciren. Zu diesem Ende legen wir durch den Standpunkt, auf welchem wir uns befinden, eine Horizontal-Ebene, und durch denselben und den beobachteten Punkt eine Vertikal-Ebene; der Durchschnitt der letzteren mit jener ersteren ist alsdann die Linie, welche wir zu suchen und zu verzeichnen haben. Sei nun A (Fig. 22) der Standpunkt, B der beobachtete Punkt auf der Erdoberfläche, AB die gerade, zwischen beiden Punkten gedachte und zu messende Entfernung; AC der Durchschnitt der durch A und B gelegten Vertikal-Ebene mit der Horizontalen durch A; BC die Senkrechte von B auf die Horizontale: dann ist AB die wahre Entfernung, AC die horizontale Entfernung beider Orte, und BC die senkrechte Höhe des Punktes B über der Horizontalen, welche letztere, wenn B′ entgegengesetzt läge, negativ würde,

d. h. die senkrechte Entfernung (Tiefe) des B' unter der Horizontalen würde. Die Länge AC ist nach dem vorher Gesagten diejenige, welche wir suchen und auftragen, die AB jene, welche wir messen, die BC diejenige, welche wir durch Zeichnung andeuten und durch den Winkel BAC, welches der Neigungswinkel, Höhen= oder Tiefenwinkel, ist, und der nach den Euclidischen Sätzen durch jene Senkrechte bestimmt wird, messen und durch Rechnung finden. Denn, wie bekannt, ist:

1. $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = AB. \cos. BAC.$

2. $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = AB. \sin. BAC.$

Zwei von dem Standpunkte aus gesehene und in verschiedenen Höhen liegende Punkte können doch, da bekanntlich drei Punkte die Lage einer Ebene bestimmen, mit dem Standpunkt selbst in einer gegen den Horizont geneigten Ebene gedacht werden, in welcher dann auch die nach ihnen zu ziehenden Gesichtslinien liegen, welche demnach einen Winkel einschließen, dessen Projection auf der Horizontal=Ebene wir kennen müssen. Der mit dem Meßtisch arbeitende Geometer kömmt indeß nicht in den Fall, diese letztere Reduction vornehmen zu müssen, da er nicht den Winkel in der geneigten Ebene, sondern den, welchen die durch beide Punkte gelegten Vertikal=Ebenen einschließen, mißt. In ebenen Gegenden, oder solchen, wo die Erhöhungen und Vertiefungen des Erdbodens nur unbedeutend sind, wird er selbst die Reduction der Linien unterlassen und sich bei der Messung der Linie selbst schon bemühen, die Operation so zu leiten, daß der Fehler unbedeutend werde; in Gebirgsgegenden wird aber jene Reduction unvermeidlich sein.

Das Abstecken und Messen einer geraden Linie.

Von einer Linie, welche wir messen sollen, müssen uns zuvörderst die Endpunkte nicht allein bekannt, sondern auch so kennbar gemacht sein, daß wir jeden derselben vom anderen Endpunkte und wenigstens aus einem in der Linie selbst liegenden Punkte deutlich sehen können; sind daher jene Endpunkte nicht schon an sich weit erkennbare Gegenstände, als Thürme, ausgezeichnete Bäume u. s. w., so werden wir durch Signale sie dem Erforderniß gemäß bezeichnen. Delambre giebt die aus der Erfahrung geschöpfte Regel, daß die Höhe des Signals wenigstens $\frac{3}{20000}$ der ganzen Weite, über den Horizont des Auges betragen müsse. Wir wählen hiezu starke Stangen, deren oberes Ende auf irgend eine Weise ausgezeichnet kennbar gemacht wird. So bringt man zuweilen oben ein laternförmiges Gehäuse an, worin man ein Bund hellfarbiges Stroh stellt, oft windet man auch wohl nur einen Strohwisch um, auch ästet man, wenn anders die Gelegenheit es erlaubt, einen Nadelholzbaum bis auf seinen Gipfel ab, welcher dann kenntlich genug ist. Da wir uns aber auf solche Weise nach den oberen Endpunkten dieser Signale richten, um die Direction der Linie zu erkennen, so leuchtet auch ein, daß dieselben sich genau über dem Punkt, welchen sie bezeichnen sollen, befinden, d. h. daß sie in der Vertikal-Ebene stehen müssen, da eine Seitenabweichung nothwendig Fehler erzeugen muß, welche nach geometrischen Gründen mit der Höhe der Signale wachsen. Eben so leuchtet auch ein, daß dieselben in der senkrechten Lage durch Streben ꝛc. so

befestigt werden müssen, daß sie beim Winde nicht schwanken können u. s. w.

Nachdem auf diese Weise die Endpunkte der Linie kennbar gemacht worden, wird die Linie selbst durch Absteckestäbe oder Meßfahnen so bezeichnet, daß man bei der Messung selbst gehörig in der Linie bleiben und nicht durch Abweichungen zur Seite eine andere Länge als die wahre erhalten möge. Die Meßfahnen sind gemeinhin runde Stäbe von 7 Fuß Länge und etwa zwei Zoll im Durchmesser, welche zum bequemeren Einstoßen in die Erde mit einem eisernen Schuh versehen werden und an ihrem oberen Ende eine Flagge von farbigem Zeuge erhalten. Diese letztere wird gemeinhin mit einer ihrer schmäleren Seiten an die Stange angenagelt; die obere lange Kante aber an ein Stäbchen befestigt, welches sich um die Stange selbst in einem Ringe drehen kann, hierdurch wird verhindert, daß der Wind die Flagge nicht völlig um die Stange wickeln und sie so dem Auge entziehen könne. Zu den Flaggen wählt man gemeinhin rothen und weißen Etamin oder auch Leinenzeug; bei der Wahl der Farben sollte indeß stets berücksichtigt werden, ob sich der Stab auf dunkeln oder hellen Gegenständen entwirft, und hiernach die abstechendsten genommen werden.

Um dem genannten Zwecke zu entsprechen, dürfen diese Stäbe nicht in größeren Entfernungen als 20 bis 30 Ruthen von einander ausgesteckt werden, welches auf folgende Weise verrichtet wird. Nennen wir die Endpunkte der zu messenden Linie A und B, so geht der Gehülfe mit einer Meßfahne von A aus in der Richtung nach B, etwa 100 bis 150 Schritt vor, macht Front

gegen A und hält die Meßfahne mit ausgestrecktem Arm lose zwischen dem Daumen und Mittelfinger, damit sie senkrecht stehe, über dem Boden. Der in A gebliebene Geometer aber stellt über A den Meßtisch auf, stellt ihn mit der Libelle horizontal, und visirt mit dem Diopter-Lineal oder Diopter-Fernrohre nach B, bemerkt nun, ob der Gehülfe die Fahne genau in der Vertikal-Ebene durch A und B hält, giebt ihm durch vorher schon verabredete Zeichen zu verstehen, ob er dieselbe mehr rechts oder links bringen solle, und endlich, wenn er die Fahne genau durch das Fadenkreuz oder die Mittellinie des Diopters gedeckt sieht, das Zeichen, sie festzustecken; und, nachdem nochmals nachgesehen, ob sie nun auch den erforderlichen Stand erhalten, das Zeichen weiter zu gehen, worauf jener mit einer andern Fahne in einer gleichen Entfernung dasselbe wiederholt u. s. w., bis die ganze Linie ausgesteckt ist.

Ist man aber beim Abstecken einer Linie mit keinem Meßtisch und Diopter-Fernrohre versehen, so wird der in A gebliebene Geometer die erste Meßfahne dadurch auf dem Endpunkt B einrichten, daß er einige Schritt hinter das Signal zurücktritt und die Fahne nun genau in eine Linie, welche er von der Kante des Signals nach der Mittellinie des B denkt, bringen läßt. Kann man in der Höhe von 4 Fuß über dem Boden durch die Achse des in A stehenden Stabes ein Visirloch anbringen, so wird dies noch vortheilhafter sein. Ist die erste Meßfahne senkrecht aufgestellt, so geht der Gehülfe mit einer zweiten Fahne weiter und der Geometer zur ersten Fahne; sind diese so eingerichtet, daß man die obere Hälfte ab-

nehmen kann und alsdann über das Untertheil zu visiren im Stande ist, oder sind sie mit Visirlöchern versehen, so wird das Verfahren erleichtert; wo nicht, so muß man sich begnügen, wieder um einige Schrite zurück zu treten und an beiden Kanten des Stabes vorbei zu visiren. Höchst wichtig bleibt es aber, hiebei alle Vorsicht zu gebrauchen, denn die Dicke des Stabes verdeckt dem Auge des Beobachters einen bedeutenden Raum, welcher durch die Winkelfläche der beiden Sehelinien aus dem Auge nach den Kanten des Stabes gemessen wird und also mit der Entfernung des zweiten Signals wächst. In dem ganzen verdeckten Raum kann sich alsdann der Gehülfe mit der zweiten Fahne befinden, in der Linie zu sein scheinen und doch nicht wirklich darin sein. Visirt man aber an den Kanten vorbei und läßt die Kante der zweiten Fahne in die Linie nach dem Mittel des Signals B bringen, so entgeht man diesen Fehlern. Auf gleiche Art wird ferner mit dem Abstecken bis zum Ende der Linie fortgefahren, wobei nun schon der Gehülfe sich nach den bereits stehenden Fahnen einrichten kann, und die Operation einen schnelleren Fortgang gewinnt.

Oft sind die Endpunkte der auszusteckenden Linie so gelegen, daß man Terrainhindernisse wegen nicht zu ihnen gelangen kann; alsdann wird man einen Punkt in der Linie suchen müssen, um dort den Meßtisch aufzustellen und wie oben mit Hülfe des Diopter-Fernrohrs das Ausstecken zu bewirken. Um aber einen Punkt in der Linie zu finden, kann man etwa auf nachstehende Art verfahren. Von einem Punkte C (Fig. 23), welchen man in oder nahe bei der abzusteckenden Linie AB ver-

muthet und durch irgend ein Merkmal bezeichnet, schreitet man auf einen Endpunkt der Linie, etwa A, um eine bestimmte Anzahl (50 — 100) Schritte, bis D vor, drehet sich um, bemerkt den Punkt im Horizont, wo die Visirlinie über C denselben trifft, und schätzt nun nach dem Augenmaaß die senkrechte Entfernung dieser Visirlinie von dem Endpunkt B, d. h. die Linie BA, und eben so das Verhältniß der Entfernungen DA und DB. Sei so jener Abstand zu 70 Schritt, dieses Verhältniß wie 3 zu 5 angenommen; so wird man immer ohne bedeutenden Fehler dieses Verhältniß auch für die Längen AD und DH annehmen, dann aber schließen können:

$$AD + DH : AD = BH : DE, \text{ oder}$$

$$3 + 5 : 3 = 70 : DE \text{ und demnach}$$

$$DE = \frac{3 \cdot 70}{3+5} = 26\tfrac{1}{4} \text{ Schritt annehmen dürfen.}$$

Man schreitet demnach senkrecht auf die Linie diese Länge ab. Da aber das Verfahren nur auf Schätzung beruhte, so wiederholt man dasselbe und wird so in einen Punkt kommen, welcher so gelegen ist, daß, nachdem man wieder auf A zu gegangen und über jenen Punkt visirt, die Visirlinie genau den Endpunkt B trifft, wodurch man erkennt, daß jener Punkt wirklich in der Linie AB liege.

Auch auf eine andere, jedoch weitläuftigere Art kann man zu diesem Zwecke gelangen, indem man sich nämlich mit einem Gehülfen wechselseitig auf die Endpunkte der Linie einrichtet. Stehe z. B. (Fig. 24) ein Gehülfe in C, der andere in D, so läßt der in D stehende den andern so weit vorgehen, bis er nach C′ in die Linie AD kömmt, hierauf gehet D vor und C richtet ihn

in D' ein, wo er in die Linie B C' getreten, dies wiederholt man so oft, bis der D in D'' und der C in C'' gekommen, wo beide einander in den Linien A D'' und B C'' erblickten, mithin beide in der Linie A B stehen, wo alsdann die Operation des Absteckens nach den gegebenen Methoden ausgeführt werden kann.

Nachdem die Linie auf solche Weise abgesteckt ist, schreitet man zur Ausmessung derselben; zu dieser bedient man sich entweder der Maaßstäbe, oder einer Meßkette, auch wohl eines Meßbandes u. dergl.

Die Messung mit Maaßstäben ist diejenige, welche bei gehörigen Anstalten die genauesten Resultate liefert, aber auch viel Zeit und großen Kostenaufwand erfordert. Die Maaßstäbe sind entweder von Holz, von Glas oder Metall; die ersteren werfen sich oft und werden daher unsicher, die letzteren verändern ihre Länge bei verschiedenen Temperaturen und können daher nur mit großer Vorsicht gebraucht werden; am besten, aber auch am kostspieligsten und zerbrechlichsten sind die gläsernen Maaßstäbe. Eine Messung dieser Art erfordert, daß man eine Brücke von Latten u. s. w. oder Schemel, welchen durch eine Schraube eine größere oder geringere Höhe gegeben werden kann, und auf welchen die Maaßstäbe gelegt werden, längs der Linie stellt. Metallene Maaßstäbe müssen mit Thermometern versehen sein, um die nöthigen Correctionen anbringen zu können, jeder einzelne Maaßstab muß durch Libellen in die horizontale Lage gebracht, die Berührung der Stäbe durch Microscope beobachtet werden u. s. w., wenn die Messung genau sein soll. Da der mit dem Meßtisch arbeitende Feldmesser die Linien,

welche er zu messen hat, nie auf eine solche Weise bestimmen wird, so werden wir die Messung mit Maaßstäben nicht weiter aus einander setzen, sondern verweisen diejenigen, welche sich hierüber belehren wollen, an die Werke, welche über dergleichen Messungen nähere Auskunft geben, als:

Description des moyens employés pour mesurer la base de Hounslow-heath. p. l. M. G. William Roy. à Paris, chez Didot fils aîné, MDCCLXXXVII.

Geometrical and Graphical Essais, by G. Adams. London, 1791.

Méchain et Delambre, base du Système mètrique décimal. Paris, chez Garnery, 1806.

Der Maaßstäbe bedient sich der Feldmesser, welcher bloß mit der Meßkette allein oder mit der Winkelboussole aufnimmt, gemeinhin nur, um die senkrechten Abstände der vorzüglichsten Punkte krummer Linien, welche aufgetragen werden sollen, von der gemessenen geraden zu nehmen, diese betragen indeß stets nur wenige Ruthen. Die Maaßstäbe, deren man sich hiezu bedient, sind von Holz, an den Enden mit einem Beschlag von Messing versehen, und in Fuße, Zolle und Linien abgetheilt; gegen den Einfluß der Feuchtigkeit aber durch einen Anstrich von Firniß geschützt. Beim Gebrauch muß man die Maaßstäbe so viel als möglich horizontal fortschieben und genau an den markirten Endpunkt des einen den andern wieder anlegen. Das Ueberschlagen der Maaßstäbe, welches wohl mitunter aus Bequemlichkeit geschieht, muß, wie leicht einzusehen ist, allemal bedeutende Fehler erzeugen.

Zur Messung längerer Linien bedient sich der Feldmesser gemeinhin der Meßkette. Dieses Werkzeug ist aus Gliedern, welche die Dicke eines starken Federkiels haben und aus Eisendraht gefertigt werden, zusammengesetzt; diese Glieder werden durch Messingringe mit einander verbunden, so daß die Entfernungen der Mittelpunkte dieser Ringe durchgehends gleich sind und 1'dc betragen. Die ganze Kette, an deren Enden größere Ringe angebracht sind, hat gemeinhin von einem Mittelpunkte dieser letzteren zum anderen eine Länge von fünf Ruthen. Diese größeren Ringe, welche dazu dienen, die Kettenstäbe, mit welchen die Kette zum Messen angespannt wird, hinein stecken zu können, werden durch kleine Wirbel mit den Endgliedern der Kette verbunden, welche diesem nach kürzer als die übrigen sind. Die einzelnen Ruthen werden durch größere oder besonders gestaltete Ringe bezeichnet. Um in gebirgigen Gegenden aufzunehmen, ist es gut, der Kette eine solche Einrichtung zu geben, daß sie verkürzt werden kann. So haben die Meßketten in Sachsen bei der dritten Ruthe schon einen größeren Ring, welcher durch einen gewöhnlichen Karabinerhaken mit dem übrigen Theil verbunden ist, so daß die Kette beliebig bis auf drei Ruthen verkürzt werden kann. Die Kettenstäbe, deren vorhin erwähnt worden, sind runde 4 Fuß hohe hölzerne Stäbe von einem Durchmesser, der dem des Kettenringes gleich ist, so daß, wenn dieser hinauf gestreift wird, der Mittelpunkt des Ringes mit der Achse des Stabes zusammen fällt. Die Stäbe haben einen eisernen Ansatz, auf welchem die Ringe ruhen, und eine Spitze, welche in der Verlängerung ihrer Achse lie-

gen muß, so daß also, wenn die Kette angespannt und die Stäbe in die Erde gesteckt werden, die entstandenen Löcher genau die Endpunkte der Kettenlänge geben. Da sich die Messingringe durch den Gebrauch ausschleifen und dehnen, die Glieder der Kette aber krumm gebogen werden können, so ist es eine nothwendige Vorsicht, vor dem jedesmaligen Gebrauche die Kette zu prüfen, ob sie auch noch die gehörige Länge habe, welches mittelst eines genauen Maaßstabes geschieht; ist ein Fehler entstanden, so muß er gebessert, oder wenn dies nicht sogleich zu bewirken ist, bei der Summirung der Kettenlängen in Rechnung gebracht werden.

Die Messung der Linie selbst mit der Meßkette geschieht nun auf folgende Weise: Zwei Leute werden an den Kettenstäben angestellt, von diesen stellt der eine seinen Kettenstab in den Endpunkt A der zu messenden Linie, der andere gehet, die Kette nach sich ziehend, längs der abgesteckten Linie; er steckt seinen Stab ein und geht längs der Kette zurück, um nachzusehen, ob sich Glieder verbogen oder die Ringe verschlungen haben, welches er nun in Stand setzt; er ergreift hiernach wieder seinen Stab, stellt denselben mit ausgestrecktem Arme senkrecht auf die Erde und rückt ihn nun nach dem Zeichen, welches der in A stehende Gehülfe giebt, der nunmehr über seinen Stab hinaus längs der abgesteckten Linie visirend, ihn einrichtet, drückt alsdann die Spitze des Stabes in die Erde, sobald er das Zeichen erhalten, daß er gehörig in der Linie stehe, ziehet ihn heraus, ergreift mit beiden Händen den Stab unter und über dem Ringe und spannt die Kette, sie in die Höhe schleudernd, an; er steckt

ihn nunmehr wieder in die Erde, so daß die Kette genau über das vorhin gemachte Loch gehet, worauf nun der Gehülfe in A, welcher während des Anspannens der Kette seinen Fuß vor dem Stabe gehalten, damit derselbe nicht durch diese Erschütterung verrückt werde, nochmals nachsiehet, ob er auch gehörig eingerichtet ist, und wenn er dies findet, das Zeichen zum Weitergehen giebt. Indem nun der vorderste Kettenzieher seinen Stab herausziehet, steckt er in das Loch einen der Zählstäbe, deren er zehn Stück bei sich führt. Diese Zählstäbe sind kleine, mit einem eisernen Schuh versehene, $1\frac{1}{2}$ Fuß lange und $\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser habende Stäbchen, welche dazu dienen, den Endpunkt der Kettenlänge zu bezeichnen, bis nun der hintere Kettenzieher hinankömmt und seinen Stab genau in dasselbe Loch steckt, die Zählstäbchen aber sorgfältig aufbewahrt und nun den Stab des vorderen Kettenziehers einrichtet u. s. w., worauf beide wieder diese Punkte verlassen, um weiter zu gehen. Hat der hintere Kettenzieher auf diese Weise die zehn Zählstäbchen gesammelt — gemeinhin hängt er sich zu diesem Behufe das lange Futteral der Kette um, der vordere aber dasjenige, worin die Stäbchen stets aufbewahrt werden — so zeigt er es dem Geometer an, welcher die Stäbchen nachzählt, sie dem vorderen Kettenzieher zurück giebt, die gemessene Länge in seinem Manual bemerkt und den Punkt, wo sich der hintere Kettenstab befindet, durch ein Piket, welches ein 2 bis 3 Fuß langes, zugespitztes, auch wohl mit einer fortlaufenden Nummer versehenes Scheit Holz ist, bezeichnet, indem dasselbe so eingeschlagen wird, daß es nur einige Zoll aus dem Boden hervorragt. — Ist man

im Fortgange der Messung (welche stets nach der angegegebenen Weise fortgesetzt wird und um so richtiger werden wird, je mehr man darauf sieht, daß die Kette gleichförmig angespannt werde, keine Knoten schlinge und horizontal liege, indem man die Kette nur mit der Hand längs dem Stabe hinaufschieben darf, wenn die Neigung des Bodens gering ist) bis zum Endpunkt B der zu messenden Linie gekommen, so gehet der vordere Kettenzieher über denselben hinaus und spannt die Kette straff über den Punkt B an, steckt den Stab fest und zählt die Ruthen, Fuße und Zolle, welche mit einem kleinen, bei den Zählstäbchen befindlichen Maaßstabe abgenommen werden, von dem hintersten Kettenstabe bis zum Endpunkte der Linie, welche Anzahl, so wie jene der wieder gesammelten Stäbchen dem Geometer angezeigt wird. Sei nun die Kette 5 Ruthen lang, habe der Geometer angemerkt, daß dreimal die Stäbchen gewechselt worden, und erhalte nun die Anzeige, daß der hintere Kettenzieher wieder 6 Stäbchen gesammelt habe und die letzte nicht volle Kettenlänge, nur 2 Ruthen 7 Fuß 8 Zoll betrage; so beträgt offenbar die Länge der gemessenen Linie $3 \times 10 + 6$ Kettenlängen $+ 2^{0} 7' 8'' = (5 \cdot 36 + 2)^{0} 7' 8'' = 182^{0} 7' 8''$.

Bei stark abhängigem Boden, so wie bei Vermessungen im Gebirge, wird die Kette, wenn das angegebene Verfahren beobachtet und sie an dem betreffenden Stabe in die Höhe geschoben wird, um in die horizontale Lage zu kommen, nie eine gerade Linie, sondern wegen der eigenen Schwere eine Curve, die sogenannte Kettenlinie, bilden; hiedurch aber der Abstand der Endpunkte oder vielmehr der senkrechten Stäbe verkürzt. Um diesen Fehler zu

vermeiden, wird man sich bei nicht sehr abhängigem Boden begnügen, die wahre Länge der Kette bei einer mittleren Spannung kennen zu lernen und das Fehlende für jede Kettenlänge in Rechnung zu bringen. Ist dagegen der Boden sehr abschüssig, so spannt man wohl eine Schnur zwischen die Kettenstäbe, der Kette selbst parallel, aus, die in Löcher, welche oben in gleicher Höhe von den untern Kettenträgern durch die Stäbe gebohrt werden, eingebunden wird; an diese Schnur hängt man bei der Ausspannung auf eine bedeutend geneigte Fläche einen gewöhnlichen Gradbogen, welcher die Neigung der Kette gegen den Horizont giebt, und somit das Mittel, um die wahre horizontale Kettenlänge nach den gegebenen Formeln berechnen zu können.

Werden die gegebenen Vorschriften bei Messung einer Linie mit der Meßkette gehörig beobachtet, so wird man sich einer genügenden Genauigkeit versichert halten dürfen; noch geringer aber wird der eingeschlichene Fehler werden, wenn man eine Länge mehreremal mit derselben Vorsicht mißt, und aus den erhaltenen Resultaten das Mittel nimmt.

Bei schnellen militärischen Aufnahmen werden die Linien nie mit Ketten und Stäben gemessen, da hierzu mehr Zeit erforderlich ist, als das Militär entbehren kann; der Schritt des Menschen, der Galoppsprung des Pferdes dienen hier zu Bestimmung der Längen. Um aber durch diese unsichere Mittel doch zu einem wenigstens erträglichen Resultate zu gelangen, müssen die Schritte nicht allein so viel als möglich gleichförmig gemacht werden; sondern es muß auch das Verhältniß des Schrittes eines

jeden Einzelnen zur Ruthe bekannt sein. Um dieses letztere zu erfahren, wird es gut sein, eine Länge von 200 300 Ruthen genau abzumessen und dann mit gleichförmigen Schritten mehreremal abzuschreiten, aus den gefundenen Zahlen das arithmetische Mittel zu nehmen und hiernach jenes Verhältniß zu erforschen.

Bei einer Länge von 350^{0} habe man z. B.

das 1ste mal 1737,
— 2te — 1743,
— 3te — 1738,
— 4te — 1726,
— 5te — 1729 Schritte gemacht, so

ist die mittlere Zahl $\frac{8673}{5} = 1734{,}6$ Schritte,

mithin das Verhältniß des Schrittes zur Ruthe

$= 1734{,}6 : 350 = 867{,}3 : 175.$

Zum Auftragen der auf solche Art gemessenen Längen wird es aber auch nöthig, den verjüngten Maaßstab, welchen man gebraucht, nach dem gefundenen Verhältniß der Schritte zur Ruthe abzuändern. Arbeitet man nämlich nach dem Maaßstabe 8″dc auf die Meile, so betragen hier nach der eben gegebenen Berechnung 100^{0} auf dem Maaßstab 0,4″dc. Es ist die Frage, wie viel Schritte nach dem erhaltenen Verhältniß auf diese Länge ausgedrückt werden, d. h. auf 100 Ruthen gehen; nennen wir diese Zahl y, so ist offenbar:

$175^{0} : 100^{0} = 867{,}3$ Schritt : y Schritt, und daher

$y = \frac{86730}{175} = 495{,}6$ Schritte.

Will man nun z. B. den Maaßstab so einrichten, daß 1000 Schritt zu einer Einheit dienen, welche alsdann

in die Zehntel und Hunderttheilchen zerlegt wird; so schließe man ferner, da diese 495,6 Schritte $= 100^0$ eine Länge von $0,4''$dc einnehmen, daß:

$$495,6 : 1000 = 0,4''\text{dc} : x'', \text{ so daß also:}$$

$$x = \frac{4000}{4956} = 0,8071025''\text{dc ist.}$$

Diese Länge trägt man demnach, wie oben bei Verfertigung der Maaßstäbe gesagt worden, auf, und theilt sie ferner ein, wodurch man die Charte nothwendig in demselben Verhältniß zum Boden erhalten muß, als der Maaßstab von $8''$dc auf die Meile es verlangt.

Bei den Aufnahmen mit dem Meßtisch wird nur eine Linie gemessen, die anderen Stücke zur Bestimmung mehrerer Dreiecke aber durch Winkel an dieser Linie genommen. Alsdann fährt man fort, die weiter zu bestimmenden Längen aus den bereits durch Zeichnung gefundenen zu bestimmen, so daß sich also die Abmessungen alle auf diese erste Linie beziehen, welche man Standlinie nennt und die mit der möglichsten Genauigkeit gemessen werden muß, da hier begangene Fehler sich in den weiteren Operationen nicht allein wiederholen, sondern auch vervielfachen müssen.

Ueber die Wahl der Standlinien läßt sich, da die Lokalität hier alles thut, nichts allgemeines bestimmen. Einige Regeln, welche man bei der Wahl beobachten muß, sind die, daß man von jedem Endpunkte und von einem in der Mitte gelegenen Punkte die größtmögliche Zahl von zu bestimmenden Punkten übersehen könne, daß das Terrain von einem Endpunkte zum andern möglichst horizontal sei, daß dasselbe eine ununterbrochene Messung erlaube u. s. w.

Lehmann verlangt ferner die Standlinie so zu wählen, daß sie entweder zwischen zwei unverrückbaren, stets wieder zu findenden Gegenständen oder in der Verlängerung derselben liege, und daß ihre Endpunkte durch eben solche Linien bezeichnet werden. So soll man sie z. B. in der Verlängerung einer durch zwei Thürme gehenden Linie oder zwischen derselben in diese Linie selbst legen, die Endpunkte derselben aber sollen so bestimmt werden, daß sie in den Durchschnittspunkt jener Linie mit einer andern ähnlichen, etwa zwischen zwei Bäumen u. s. w. gedachten, fallen, und also stets wiedergefunden werden können, wenn die Messung der Linie nochmals vorgenommen werden muß. Lehmann behauptete, daß man im Stande wäre, einen Raum von mehreren Quadratmeilen mit Genauigkeit aufzunehmen, wenn man eine Standlinie mit möglichster Vorsicht gemessen. Wenn diese Annahme auch etwas ausgedehnt ist, so ist doch bestimmt, daß man bei einer Fläche von vier bis sechs Quadratmeilen nur einer Standlinie bedarf, deren Länge dieser Flächenausdehnung angemessen ist.

Dem zu einer flüchtigen militärischen Aufnahme beorderten Feldmesser ist es oft nicht möglich, eine Standlinie zu messen; er kann selbst oft keine aus einer früheren Messung, einem trigonometrischen Netz entlehnte Punkte erhalten, und muß sich alsdann begnügen, aus irgend einer guten Specialcharte der betreffenden Gegend die Entfernung zweier Punkte, welche er, falls Zeit da wäre, als Standlinien annehmen könnte, abzunehmen und als die wahre Entfernung anzusehen, alsdann aber dem Maaßstabe, in welchem seine Aufnahme geschehen soll, zu pro=

portioniren, welches geometrisch auf leichte Weise bewerkstelligt werden kann, indem man auf den Schenkel AB (Fig. 25) eines beliebig construirten Winkels nach dem bestimmten Maaßstabe die Weite von $\frac{1}{4}$ bis 1 Meile aufträgt, und auf den Schenkel AC dieselbe Weite nach dem Maaßstabe der Charte. Hat man hierdurch die Punkte D und E bestimmt; so trage man aus A auf letzteren Schenkel die als Standlinie abgenommene Weite AF, ziehe DE und durch F mit derselben die Parallele FG, wodurch AG die Entfernung jener Punkte nach dem Maaßstabe, welcher bestimmt worden, sein wird, wie dies aus den ersten Lehrsätzen der Elementar-Geometrie erhellt.

Will man das ganze geometrische Netz einer Gegend aus einer Specialkarte, andern Vermessung &c. in einem gegebenen Verhältnisse vergrößert oder verkleinert auftragen; so verzeichne man ein Dreieck ABC (Fig. 26), dessen Grundlinie BC man in dem gegebenen Verhältniß BD : DC theilt. Sodann ziehe man mit dieser Grundlinie BC durch den ganzen Flächenraum des Dreiecks ABC nahe aneinander Parallelen und die Linie AD. Findet man nun in der Specialcharte irgend eine Länge, z. B. CG, und will für das gegebene Verhältniß BD : DC die mit CG correspondirende Länge suchen; so fasse man CG zwischen die Spitzen eines Zirkels, versuche, welche Parallele im Dreieck ABD ihr an Länge gleicht und nehme, wenn dies z. B. EG wäre, GF für das gesuchte Maaß ab; denn die Elementar-Geometrie lehrt, daß:

$$BD : DC = EG : GF$$

ist.

Vierter Abschnitt.

Das Messen der Winkel mittelst des Meßtisches.

Wie es schon oben gesagt worden, messen wir die Winkel, welche die durch die betreffenden Objekte und unsern Standpunkt gelegte Vertikal-Ebene mit einander einschließen. Der Durchschnitt dieser Ebene ist eine im Standpunkte errichtete Senkrechte. Ist nun der Meßtisch über diesen Punkt aufgestellt, das Blatt desselben (wie sogleich näher gezeigt werden soll) horizontal gestellt; so durchschneidet die Ebene des Meßtisches jene Vertikal-Ebene in solcher Linie, die senkrecht auf ihrem gemeinsamen Durchschnitte stehen. Können wir demnach diese Durchschnittslinie auf irgend eine Art verzeichnen; so ist der dadurch begränzte Winkel nach den Euclidischen Sätzen das Maaß der Neigung jener Vertikal-Ebenen, mithin eben jener Winkel, welchen wir suchten.

Die einfachste Methode, den Meßtisch horizontal zu stellen, ist die, daß man zwei Füße desselben möglichst tief in den Boden eindrückt, die Libelle in die Mitte des Blattes setzt, den dritten Fuß, vor welchen man sich stellt, so hebt, daß die Blase der Libelle nach dieser Seite steigt, und durch eine entsprechende Seitenbewegung desselben die Blase in eine Linie zwischen dem Nullpunkt der Libelle

und der Brust des Arbeitenden zu stehen kömmt. Nunmehr wird der Fuß dem Boden genähert, doch so, daß die Blase nicht aus ihrer Lage kömmt und sanft eingedrückt, bis die Blase in gerader Linie fortgehend, den Nullpunkt erreicht hat. Nimmt sie nur noch eine kleine Seitenabweichung an, so drückt man den Fuß, nach welchem sie abweicht, sanft nieder, wodurch man leicht den beabsichtigten Zweck erreichen wird.

Hat man nunmehr den Meßtisch mittelst dieser Verrichtungen horizontal über den Punkt auf dem Boden aufgestellt, welchen wir als Scheitelpunkt des zu messenden Winkels betrachten, so stecke man in den Punkt auf dem Blatte, welchen wir als Scheitelpunkt ansehen wollen, d. h. als das Bild des Punktes, der lothrecht unter ihm auf dem Boden liegt, eine Nadel, wozu eine feine stählerne Nähnadel, die mit einem Kopf von Siegellack versehen, gewählt wird, lege nun an diese Nadel die Kante des Diopter-Lineals, der Kippregel oder des Diopter-Fernrohrs, kurz das von diesen dreien Instrumenten, dessen man sich bedienen will, und richtet nun dasselbe, indem man es um die Nadel behutsam drehet, so ein, daß der Faden des Objectiv-Diopters genau die Mitte des einen Gegenstandes bedeckt; man ziehet nun längs der Kante des Lineals eine feine Linie, möglichst dicht an der Kante selbst, doch ohne das Lineal im mindesten zu verrücken; nunmehr hebt man das Diopter-Lineal ab, setzt es hart an die Anschlagnadel in der ungefähren Richtung nach dem andern Gegenstande nieder, vollendet die Einrichtung durch behutsames Drehen und zieht endlich wieder die Visirlinie aus, wenn sich die Mittellinie des Objekts und der Faden,

das Fadenkreuz u. s. w., kurz die senkrechte Mittellinie des Werkzeugs, decken. Diese beiden Visirlinien werden aber, nach dem Vorherigen, genau dem Winkel gleich sein, welchen die Vertikal-Ebenen durch die betreffenden Punkte einschließen, vorausgesetzt, daß man genau arbeitet, d. h. den Meßtisch nicht aus seiner einmaligen Lage verrückt, und die Visirlinie nicht anders ausgezogen hat, als nachdem man sich nochmals versichert hätte, daß das Lineal gehörig an der Nadel anliege, und dasselbe auch beim Ziehen der Linie nicht aus seiner Lage bringt.

Fast in allen Fällen wird sich der Feldmesser begnügen, einen solchen Winkel verzeichnet zu haben, doch kann er auch denselben in Gradtheilen auszudrücken wünschen: Dieses geschieht mittelst eines genauen tausendtheiligen Maaßstabes nach dem bekannten Satze: daß die Sehne eines Winkels dem doppelten Sinus des halben Winkels gleich ist. Durchschneidet man die Schenkel des Winkels aus dem Scheitelpunkte mit einem gleichen Halbmesser AB = AC (Fig. 27), welcher nach dem Maaßstabe 500 betragen mag, und ziehet man nun die Sehne BC, so ist

$$\frac{BC}{2AB} = \sin. \tfrac{1}{2} BAC.$$

Man nehme nunmehr die Länge BC ab und fände sie z. B. = 489, so ist:

$$\frac{489}{2.500} = 0{,}489 = \sin. \tfrac{1}{2} BAC.$$

In den trigonometrischen Tafeln findet man, daß 0,489 = sin. 29° 19′, mithin ist

$$\angle ABC = 58^\circ\ 38'.$$

Um nun auch diese Mühe den Feldmessern zu sparen, füge ich hier eine Sehnen-Tafel der Winkel von Minute zu Minute, für den Halbmesser 500 berechnet, bei.

Sehnen-Tafel

für

die Grade der Winkel bis zu 100° für den Halbmesser
des Kreises = 500.

	Grad.					
M.	0	1	2	3	4	5
0	0,00	8,73	17,45	26,18	34,90	43,62
1	0,14	8,87	17,60	26,32	35,04	43,76
2	0,29	9,02	17,74	26,47	35,19	43,91
3	0,44	9,16	17,89	26,61	35,33	44,05
4	0,58	9,31	18,03	26,76	35,48	44,20
5	0,73	9,45	18,18	26,90	35,63	44,34
6	0,87	9,60	18,32	27,05	35,77	44,49
7	1,02	9,74	18,47	27,19	35,92	44,64
8	1,16	9,89	18,61	27,34	36,06	44,78
9	1,31	10,03	18,76	27,48	36,21	44,93
10	1,45	10,18	18,91	27,63	36,35	45,07
11	1,60	10,33	19,05	27,78	36,50	45,22
12	1,74	10,47	19,20	27,92	36,64	45,36
13	1,89	10,62	19,34	28,07	36,79	45,51
14	2,04	10,76	19,49	28,21	36,93	45,65
15	2,18	10,91	19,63	28,36	37,08	45,80
16	2,33	11,05	19,78	28,50	37,22	45,94
17	2,47	11,20	19,92	28,65	37,37	46,09
18	2,62	11,34	20,07	28,79	37,51	46,23
19	2,76	11,49	20,21	28,94	37,66	46,38
20	2,91	11,63	20,36	29,08	37,81	46,52
21	3,05	11,78	20,51	29,23	37,95	46,67
22	3,20	11,93	20,65	29,37	38,10	46,81
23	3,34	12,07	20,80	29,52	38,24	46,96
24	3,49	12,22	20,94	29,67	38,39	47,11
25	3,64	12,36	21,09	29,81	38,53	47,25
26	3,78	12,51	21,23	29,96	38,68	47,40
27	3,93	12,65	21,38	30,10	38,82	47,54
28	4,07	12,80	21,52	30,25	38,97	47,69
29	4,22	12,94	21,67	30,39	39,11	47,83
30	4,36	13,09	21,81	30,54	39,26	47,98

M.	Grad. 0	1	2	3	4	5
30	4,36	13,09	21,81	30,54	39,26	47,98
31	4,51	13,23	21,96	30,68	39,40	48,12
32	4,65	13,38	22,10	30,83	39,55	48,27
33	4,80	13,52	22,25	30,97	39,69	48,41
34	4,94	13,67	22,40	31,12	39,84	48,56
35	5,09	13,82	22,54	31,26	39,99	48,70
36	5,23	13,96	22,69	31,41	40,13	48,85
37	5,38	14,11	22,83	31,56	40,28	48,99
38	5,53	14,25	22,98	31,70	40,42	49,14
39	5,67	14,40	23,12	31,85	40,57	49,28
40	5,82	14,54	23,27	31,99	40,71	49,43
41	5,96	14,69	23,41	32,14	40,86	49,58
42	6,11	14,83	23,56	32,28	41,00	49,72
43	6,25	14,98	23,70	32,43	41,15	49,87
44	6,40	15,12	23,85	32,57	41,29	50,01
45	6,54	15,27	23,99	32,72	41,44	50,16
46	6,69	15,42	24,14	32,86	41,58	50,30
47	6,83	15,56	24,29	33,01	41,73	50,45
48	6,98	15,71	24,43	33,15	41,87	50,59
49	7,13	15,85	24,58	33,30	42,02	50,74
50	7,27	16,00	24,72	33,44	42,17	50,88
51	7,42	16,14	24,87	33,59	42,31	51,03
52	7,56	16,29	25,01	33,74	42,46	51,17
53	7,71	16,43	25,16	33,88	42,60	51,32
54	7,85	16,58	25,30	34,03	42,75	51,46
55	8,00	16,72	25,45	34,17	42,89	51,61
56	8,14	16,87	25,59	34,32	43,04	51,75
57	8,29	17,02	25,74	34,46	43,18	51,90
58	8,43	17,16	25,89	34,61	43,33	52,04
59	8,58	17,31	26,03	34,75	43,47	52,19
60	8,73	17,45	26,18	34,90	43,62	52,33

	Grad.					
M.	6	7	8	9	10	11
0	52,33	61,05	69,76	784,6	87,15	95,84
1	52,48	61,19	69,90	78,60	87,30	95,99
2	52,63	61,34	70,05	78,75	87,44	96,13
3	52,77	61,48	70,19	78,89	87,59	96,28
4	52,92	61,63	70,34	79,04	87,73	96,42
5	53,06	61,77	70,48	79,18	87,88	96,57
6	53,21	61,92	70,63	79,33	88,02	96,71
7	53,35	62,06	70,77	79,47	88,17	96,86
8	53,50	62,21	70,92	79,62	88,31	97,00
9	53,64	62,35	71,06	79,76	88,46	97,15
10	53,79	62,50	71,21	79,91	88,60	97,29
11	53,93	62,64	71,35	80,05	88,75	97,44
12	54,08	62,79	71,50	80,20	88,89	97,58
13	54,22	62,93	71,64	80,34	89,04	97,73
14	54,37	63,08	71,79	80,49	89,18	97,87
15	54,51	63,22	71,93	80,63	89,33	98,02
16	54,66	63,37	72,08	80,78	89,47	98,16
17	54,80	63,52	72,22	80,92	89,62	98,31
18	54,95	63,66	72,37	81,07	89,76	98,45
19	55,09	63,81	72,51	81,21	89,91	98,60
20	55,24	63,95	72,66	81,36	90,05	98,74
21	55,38	64,10	72,80	81,50	90,20	98,88
22	55,53	64,24	72,95	81,65	90,34	99,03
23	55,68	64,39	73,09	81,79	90,49	99,17
24	55,82	64,53	73,24	81,94	90,63	99,32
25	55,97	64,68	73,38	82,08	90,78	99,46
26	56,11	64,82	73,53	82,23	90,92	99,61
27	56,26	64,97	73,67	82,37	91,07	99,75
28	56,40	65,11	73,82	82,52	91,21	99,90
29	56,55	65,26	73,96	82,66	91,36	100,04
30	56,69	65,40	74,11	82,81	91,50	100,19

M.	Grad 6	7	8	9	10	11
30	56,69	65,40	74,11	82,81	91,50	100,19
31	56,84	65,55	74,25	82,95	91,65	100,33
32	56,98	65,69	74,40	83,10	91,79	100,48
33	57,13	65,74	74,54	83,24	91,94	100,62
34	57,27	65,98	74,69	83,39	92,08	100,77
35	57,42	66,13	74,83	83,53	92,22	100,91
36	57,56	66,27	74,98	83,68	92,37	101,06
37	57,71	66,42	75,12	83,82	92,51	101,20
38	57,85	66,56	75,27	83,97	92,66	101,34
39	58,00	66,71	75,41	84,11	92,80	101,49
40	58,14	66,85	75,56	84,26	92,95	101,63
41	58,29	67,00	75,70	84,40	93,09	101,78
42	58,43	67,14	75,85	84,55	93,24	101,92
43	58,58	67,29	75,99	84,69	93,38	102,07
44	58,72	67,43	76,14	84,84	93,53	102,21
45	58,87	67,58	76,28	84,98	93,67	102,36
46	59,01	67,72	76,43	85,13	93,82	102,50
47	59,16	67,87	76,57	85,27	93,96	102,65
48	59,31	68,01	76,72	85,42	94,11	102,79
49	59,45	68,16	76,86	85,56	94,25	102,94
50	59,60	68,30	77,01	85,71	94,40	103,08
51	59,74	68,45	77,15	85,85	94,54	103,23
52	59,89	68,59	77,30	86,00	94,69	103,37
53	60,03	68,74	77,44	86,14	94,83	103,51
54	60,18	68,88	77,59	86,29	94,98	103,66
55	60,32	69,03	77,73	86,43	95,12	103,80
56	60,47	69,18	77,88	86,58	95,27	103,95
57	60,61	69,32	78,02	86,72	95,41	104,09
58	60,76	69,47	78,17	86,86	95,56	104,24
59	60,90	69,61	78,31	87,01	95,70	104,38
60	61,05	69,76	78,46	87,15	95,84	104,53

	Grad.					
M.	12	13	14	15	16	17
0	104,53	113,20	121,87	130,53	139,17	147,81
1	104,67	113,35	122,01	130,67	139,32	147,95
2	104,82	113,49	122,16	130,81	139,46	148,10
3	104,96	113,64	122,30	130,96	139,60	148,24
4	105,11	113,78	122,45	131,10	139,75	148,38
5	105,25	113,92	122,59	131,25	139,89	148,53
6	105,40	114,07	122,73	131,39	140,04	148,67
7	105,54	114,21	122,88	131,53	140,18	148,82
8	105,68	114,36	123,02	131,68	140,32	148,96
9	105,83	114,50	123,17	131,82	140,47	149,10
10	105,97	114,65	123,31	131,97	140,61	149,25
11	106,12	114,79	123,46	132,11	140,76	149,39
12	106,26	114,94	123,60	132,26	140,90	149,53
13	106,41	115,08	123,74	132,40	141,04	149,68
14	106,55	115,23	123,89	132,54	141,19	149,82
15	106,70	115,37	124,03	132,69	141,33	149,97
16	106,84	115,51	124,18	132,83	141,48	150,11
17	106,99	115,66	124,32	132,98	141,62	150,25
18	107,13	115,80	124,47	133,12	141,76	150,40
19	107,28	115,95	124,61	133,26	141,91	150,54
20	107,42	116,09	124,76	133,41	142,05	150,68
21	107,56	116,24	124,90	133,55	142,20	150,83
22	107,71	116,38	125,04	133,70	142,34	150,97
23	107,85	116,53	125,19	133,84	142,48	151,12
24	108,00	116,67	125,33	133,99	142,63	151,26
25	108,14	116,81	125,48	134,13	142,77	151,40
26	108,29	116,96	125,63	134,27	142,92	151,55
27	108,43	117,10	125,77	134,42	143,06	151,69
28	108,58	117,25	125,91	134,56	143,20	151,83
29	108,72	117,39	126,05	134,71	143,35	151,98
30	108,87	117,54	126,20	134,85	143,49	152,12

	Grad.					
M.	12	13	14	15	16	17
30	108,87	117,54	126,20	134,85	143,49	152,12
31	109,01	117,68	126,34	134,99	143,64	152,27
32	109,16	117,83	126,49	135,14	143,78	152,41
33	109,30	117,97	126,63	135,28	143,92	152,55
34	109,44	118,11	126,78	135,43	144,07	152,70
35	109,59	118,26	126,92	135,57	144,21	152,84
36	109,73	118,40	127,06	135,71	144,36	152,98
37	109,88	118,55	127,21	135,86	144,50	153,13
38	110,02	118,69	127,35	136,00	144,64	153,27
39	110,17	118,84	127,50	136,15	144,79	153,42
40	110,31	118,98	127,64	136,29	144,93	153,56
41	110,46	119,13	127,78	136,44	145,07	153,70
42	110,60	119,27	127,93	136,58	145,22	153,85
43	110,75	119,41	128,07	136,72	145,36	153,99
44	110,89	119,56	128,22	136,87	145,51	154,13
45	111,03	119,70	128,36	137,01	145,65	154,28
46	111,18	119,85	128,51	137,16	145,79	154,42
47	111,32	119,99	128,65	137,30	145,94	154,57
48	111,47	120,14	128,79	137,44	146,08	154,71
49	111,61	120,28	128,94	137,59	146,23	154,85
50	111,76	120,42	129,08	137,73	146,37	155,00
51	111,90	120,57	129,23	137,88	146,51	155,14
52	112,05	120,71	129,37	138,02	146,56	155,28
53	112,19	120,86	129,52	138,16	146,80	155,43
54	112,34	121,00	129,66	138,31	146,95	155,57
55	112,48	121,15	129,80	138,45	147,09	155,72
56	112,62	121,29	129,95	128,60	147,23	155,86
57	112,77	121,44	130,09	138,74	147,38	156,00
58	112,91	121,58	130,24	138,88	147,52	156,15
59	113,06	121,72	130,38	139,03	147,66	156,29
60	113,20	121,87	130,53	139,17	147,81	156,43

	Grad.					
M.	18	19	20	21	22	23
0	156,43	165,05	173,65	182,23	190,81	199,37
1	156,58	165,19	173,79	182,38	190,95	199,51
2	156,72	165,33	173,93	182,52	191,09	199,65
3	156,86	165,48	174,08	182,66	191,24	199,79
4	157,01	165,62	174,22	182,81	191,38	199,94
5	157,15	165,76	174,36	182,95	191,52	200,08
6	157,30	165,91	174,51	183,09	191,66	200,22
7	157,44	166,05	174,65	183,24	191,81	200,36
8	157,58	166,19	174,79	183,38	191,95	200,51
9	157,73	166,34	174,94	183,52	192,09	200,65
10	157,87	166,48	175,08	183,76	192,24	200,79
11	158,01	166,62	175,22	183,81	192,38	200,93
12	158,16	166,77	175,37	183,95	192,52	201,08
13	158,30	166,91	175,51	184,09	192,66	201,22
14	158,44	167,05	175,65	184,24	192,81	201,36
15	158,59	167,20	175,80	184,38	192,95	201,50
16	158,73	167,34	175,94	184,52	193,09	201,65
17	158,88	167,48	176,08	184,67	193,23	201,79
18	159,02	167,63	176,22	184,81	193,38	201,93
19	159,16	167,77	176,37	184,95	193,52	202,07
20	159,31	167,91	176,51	185,09	193,66	202,22
21	159,45	168,06	176,65	185,24	193,81	202,36
22	159,59	168,20	176,80	185,38	193,95	202,50
23	159,74	168,35	176,94	185,52	194,09	202,64
24	159,88	168,49	177,08	185,67	194,23	202,79
25	160,02	168,63	177,23	185,81	194,38	202,93
26	160,17	168,78	177,37	185,95	194,52	203,07
27	160,31	168,92	177,51	186,09	194,66	203,21
28	160,45	169,06	177,66	186,24	194,80	203,36
29	160,60	169,21	177,80	186,38	194,95	203,50
30	160,74	169,35	177,94	186,52	195,09	203,64

	Grad.					
M.	18	19	20	21	22	23
30	160,74	169,35	177,94	186,52	195,09	203,64
31	160,89	169,49	178,09	186,67	195,23	203,78
32	161,03	169,64	178,23	186,81	195,37	203,93
33	161,17	169,78	178,37	186,95	195,52	204,07
34	161,32	169,92	178,52	187,09	195,66	204,21
35	161,46	170,07	178,66	187,24	195,80	204,35
36	161,60	170,21	178,80	187,38	195,95	204,40
37	161,75	170,35	178,94	187,52	196,09	204,64
38	161,89	170,50	179,09	187,67	196,23	204,78
39	162,03	170,64	179,23	187,81	196,37	204,92
40	162,18	170,78	179,37	187,95	196,52	205,06
41	162,32	170,93	179,52	188,09	196,66	205,21
42	162,46	171,07	179,66	188,24	196,80	205,35
43	162,61	171,21	179,80	188,38	196,94	205,49
44	162,75	171,35	179,95	188,52	197,09	205,63
45	162,89	171,50	180,09	188,67	197,23	205,78
46	163,04	171,64	180,23	188,81	197,37	205,92
47	163,18	171,78	180,38	188,95	197,51	206,06
48	163,32	171,93	180,52	189,09	197,66	206,20
49	163,47	172,07	180,66	189,24	197,80	206,35
50	163,61	172,21	180,80	189,38	197,94	206,49
51	163,76	172,36	180,95	189,52	198,08	206,63
52	163,90	172,50	181,09	189,67	198,23	206,77
53	164,04	172,64	181,23	189,81	198,37	206,91
54	164,19	172,79	181,38	189,95	198,51	207,06
55	164,33	172,93	181,52	190,09	198,65	207,20
56	164,47	173,07	181,66	190,24	198,80	207,34
57	164,62	173,22	181,81	190,38	198,94	207,48
58	164,76	173,36	181,95	190,52	199,08	207,63
59	164,90	173,50	182,09	190,67	199,22	207,77
60	165,05	173,65	182,23	190,81	199,37	207,91

	Grad.					
M.	24	25	26	27	28	29
0	207,91	216,44	224,95	233,44	241,92	250,38
1	208,05	216,58	225,09	233,59	242,06	250,52
2	208,20	216,7	225,23	233,73	242,20	250,66
3	208,34	216,86	225,38	233,87	242,34	250,80
4	208,48	217,01	225,52	234,01	242,49	250,94
5	208,62	217,15	225,66	234,15	242,63	251,08
6	208,76	217,29	225,80	234,29	242,77	251,22
7	208,91	217,43	225,94	234,43	242,91	251,36
8	209,05	217,57	226,08	234,58	243,05	251,51
9	209,19	217,72	226,23	234,72	243,19	251,65
10	209,33	217,86	226,37	234,86	243,33	251,79
11	209,48	218,00	226,51	235,00	243,47	251,93
12	209,62	218,14	226,65	235,14	243,61	252,07
13	209,76	218,28	226,79	235,28	243,76	252,21
14	209,90	218,43	226,93	235,42	243,90	252,35
15	210,04	218,57	227,08	235,57	244,04	252,49
16	210,19	218,71	227,22	235,71	244,18	252,63
17	210,33	218,85	227,36	235,85	244,32	252,77
18	210,47	218,99	227,50	235,99	244,46	252,91
19	210,61	219,14	227,64	236,13	244,60	253,05
20	210,76	219,28	227,78	236,27	244,74	253,19
21	210,90	219,42	227,93	236,41	244,88	253,33
22	211,04	219,56	228,07	236,55	245,02	253,48
23	211,18	219,70	228,21	236,70	245,17	253,62
24	211,32	219,85	228,35	236,84	245,31	253,76
25	211,47	219,99	228,49	236,98	245,45	253,90
26	211,61	220,13	228,63	237,12	245,59	254,04
27	211,75	220,27	228,77	237,26	245,73	254,18
28	211,89	220,41	228,92	237,40	245,87	254,32
29	212,03	220,55	229,06	237,54	246,01	254,46
30	212,18	220,70	229,20	237,68	246,15	254,60

	Grad.					
M.	24	25	26	27	28	29
30	212,18	220,70	229,20	237,68	246,15	254,60
31	212,32	220,84	229,34	237,83	246,29	254,74
32	212,46	220,98	229,48	237,97	246,43	254,88
33	212,60	221,12	229,62	238,11	246,58	255,02
34	212,75	221,26	229,77	238,25	246,72	255,16
35	212,89	221,41	229,91	238,39	246,86	255,30
36	213,03	221,55	230,05	238,53	247,00	255,44
37	213,17	221,69	230,19	238,67	247,14	255,59
38	213,31	221,83	230,33	238,81	247,28	255,73
39	213,46	221,97	230,47	238,96	247,42	255,87
40	213,60	222,11	230,61	239,10	247,56	256,01
41	213,74	222,26	230,76	239,24	247,70	256,15
42	213,88	222,40	230,90	239,38	247,84	256,29
43	214,02	222,54	231,04	239,52	247,98	256,43
44	214,17	222,68	231,18	239,66	248,13	256,57
45	214,31	222,82	231,32	239,80	248,27	256,71
46	214,45	222,97	231,46	239,94	248,41	256,85
47	214,59	223,11	231,61	240,09	248,55	256,99
48	214,73	223,25	231,75	240,23	248,69	257,13
49	214,88	223,39	231,89	240,37	248,83	257,27
50	215,02	223,53	232,03	240,51	248,97	257,41
51	215,16	223,67	232,17	240,65	249,11	257,55
52	215,30	223,82	232,31	240,79	249,25	257,69
53	215,44	223,96	232,45	240,93	249,39	257,83
54	215,59	224,10	232,60	241,07	249,53	257,98
55	215,73	224,24	232,74	241,22	249,67	258,12
56	215,87	224,38	232,88	241,36	249,82	258,26
57	216,01	224,52	233,02	241,50	249,96	258,40
58	216,15	224,67	233,16	241,64	250,10	258,54
59	216,30	224,81	233,30	241,78	250,24	258,68
60	216,44	224,95	233,44	241,92	250,38	258,82

M.	Grad 30	31	32	33	34	35
0	258,82	267,24	275,64	284,02	292,37	300,71
1	258,96	267,38	275,79	284,15	292,51	300,84
2	259,10	267,52	275,92	284,29	292,65	300,98
3	259,24	267,66	276,06	284,43	292,79	301,12
4	259,38	267,80	276,20	284,57	292,93	301,26
5	259,52	267,94	276,34	284,71	293,07	301,40
6	259,66	268,08	276,48	284,85	293,20	301,54
7	259,80	268,22	276,62	284,99	293,34	301,68
8	259,94	268,36	276,76	285,14	293,48	301,81
9	260,08	268,50	276,89	285,27	293,62	301,95
10	260,22	268,64	277,03	285,41	293,76	302,09
11	260,36	268,78	277,17	285,55	293,90	302,23
12	260,50	268,92	277,31	285,69	294,04	302,37
13	260,64	269,06	277,45	285,83	294,18	302,51
14	260,78	269,20	277,59	285,97	294,32	302,65
15	260,93	269,34	277,73	286,11	294,46	302,79
16	261,07	269,48	277,87	286,25	294,60	302,92
17	261,21	269,62	278,01	286,38	294,74	303,06
18	261,35	269,76	278,15	286,52	294,87	303,20
19	261,49	269,90	278,29	286,66	295,01	303,34
20	261,63	270,04	278,43	286,80	295,15	303,48
21	261,77	270,18	278,57	286,94	295,29	303,62
22	261,91	270,32	278,71	287,08	295,43	303,76
23	262,05	270,46	278,85	287,22	295,57	303,89
24	262,19	270,60	278,99	287,36	295,71	304,03
25	262,33	270,74	279,13	287,50	295,85	304,17
26	262,47	270,88	279,27	287,64	295,99	304,31
27	262,61	271,02	279,41	287,78	296,12	304,45
28	262,75	271,16	279,55	287,92	296,26	304,59
29	262,89	271,30	279,69	288,06	296,40	304,73
30	263,03	271,44	279,83	286,20	296,54	304,86

M.	Grad. 30	31	32	33	34	35
30	263,03	271,44	279,83	288,20	296,54	304,86
31	263,17	271,58	279,97	288,34	296,68	305,00
32	263,31	271,72	280,10	288,47	296,82	305,14
33	263,45	271,86	280,25	288,61	296,96	305,28
34	263,59	272,00	280,39	288,75	297,10	305,42
35	263,73	272,14	280,53	288,89	297,24	305,56
36	263,87	272,28	280,67	289,03	297,37	305,70
37	264,01	272,42	280,80	289,17	297,51	305,83
38	264,15	272,56	280,95	289,31	297,65	305,97
39	264,29	272,70	281,09	289,45	297,79	306,11
40	264,43	272,84	281,22	289,59	297,93	306,25
41	264,57	272,98	281,36	289,73	298,07	306,39
42	264,71	273,12	281,50	289,87	298,21	306,53
43	264,85	273,26	281,64	290,01	298,35	306,66
44	264,99	273,40	281,78	290,15	298,49	306,80
45	265,14	273,54	281,92	290,28	298,62	306,94
46	265,28	273,68	282,06	290,42	298,76	307,08
47	265,42	273,82	282,20	290,56	298,90	307,22
48	265,56	273,96	282,34	290,70	299,04	307,36
49	265,70	274,10	282,48	290,84	299,18	307,49
50	265,84	274,24	282,62	290,98	299,32	307,63
51	265,98	274,38	282,76	291,12	299,46	307,77
52	266,12	274,52	282,90	291,26	299,60	307,91
53	266,26	274,66	283,04	291,40	299,73	308,05
54	266,40	274,80	283,18	291,54	299,87	308,19
55	266,54	274,94	283,32	291,68	300,01	308,32
56	266,68	275,08	283,46	291,82	300,15	308,46
57	266,82	275,22	283,60	291.96	300,29	308,60
58	266,96	275,36	283,74	292,10	300,43	308,74
59	267,10	275,50	283,88	292,23	300,57	308,88
60	267,24	275,64	284,02	292,37	300,71	309,02

	Grad.					
M.	36	37	38	39	40	41
0	309,02	317,30	325,57	333,81	342,02	350,21
1	309,15	317,44	325,71	333,94	342,15	350,34
2	309,29	317,58	325,84	334,08	342,29	350,48
3	309,43	317,72	325,98	334,22	342,43	350,62
4	309,57	317,86	326,12	334,36	342,57	350,75
5	309,71	317,99	326,26	334,49	342,70	350,89
6	309,85	318,13	326,39	334,63	342,84	351,02
7	309,98	318,27	326,53	334,77	342,98	351,16
8	310,12	318,41	326,67	334,90	343,11	351,30
9	310,26	318,55	326,81	335,04	343,25	351,43
10	310,40	318,68	326,94	335,18	343,39	351,57
11	310,54	318,82	327,08	335,31	343,52	351,71
12	310,68	318,96	327,22	335,45	343,66	351,84
13	310,81	319,10	327,36	335,59	343,80	351,98
14	310,95	319,23	327,49	335,73	343,93	352,11
15	311,09	319,37	327,63	335,86	344,07	352,25
16	311,23	319,51	327,77	336,00	344,21	352,39
17	311,37	319,65	327,90	336,14	344,34	352,52
18	311,51	319,79	328,04	336,27	344,48	352,66
19	311,64	319,92	328,18	336,41	344,62	352,79
20	311,78	320,06	328,32	336,55	344,75	352,93
21	311,92	320,20	328,45	336,68	344,89	353,07
22	312,06	320,34	328,59	336,82	345,02	353,20
23	312,20	320,47	328,73	336,96	345,16	353,34
24	312,33	320,61	328,87	337,10	345,30	353,47
25	312,47	320,75	329,00	337,23	345,43	353,61
26	312,61	320,89	329,14	337,37	345,57	353,75
27	312,75	321,02	329,28	337,51	345,71	353,88
28	312,89	321,16	329,42	337,64	345,84	354,02
29	313,03	321,30	329,55	337,78	345,98	354,15
30	313,16	321,44	329,69	337,92	346,12	354,29

	Grad.					
M.	36	37	38	39	40	41
30	313,16	321,44	329,69	337,92	346,12	354,29
31	313,30	321,58	329,83	338,05	346,25	354,43
32	313,44	321,71	329,96	338,19	346,39	354,56
33	313,58	321,85	330,10	338,33	346,53	354,70
34	313,72	321,99	330,24	338,46	346,66	354,83
35	313,85	322,13	330,38	338,60	346,80	354,97
36	313,99	322,27	330,51	338,74	346,94	355,11
37	314,13	322,40	330,65	338,87	347,07	355,24
38	314,27	322,54	330,79	339,01	347,21	355,38
39	314,41	322,68	330,93	339,15	347,34	355,51
40	314,54	322,82	331,06	339,28	347,48	355,65
41	314,68	322,95	331,20	339,42	347,62	355,79
42	314,82	323,09	331,34	339,56	347,75	355,92
43	314,96	323,23	331,47	339,70	347,89	356,06
44	315,10	323,37	331,61	339,83	348,03	356,19
45	315,23	323,50	331,75	339,97	348,16	356,33
46	315,37	323,64	331,89	340,11	348,30	356,47
47	315,51	323,78	332,02	340,24	348,44	356,60
48	315,65	323,92	332,16	340,38	348,57	356,74
49	315,79	324,05	332,30	340,52	348,71	356,87
50	315,92	324,19	332,44	340,65	348,84	357,01
51	316,06	324,33	332,57	340,79	348,98	357,15
52	316,20	324,47	332,71	340,93	349,12	357,28
53	316,34	324,61	332,85	341,06	349,25	357,42
54	316,48	324,74	332,98	341,20	349,39	357,55
55	316,61	324,88	333,12	341,34	349,53	357,69
56	316,75	325,02	333,26	341,47	349,66	357,82
57	316,89	325,16	333,40	341,61	349,80	357,96
58	317,03	325,29	333,53	341,75	349,93	358,10
59	317,17	325,43	333,67	341,88	350,07	358,23
60	317,30	325,57	333,81	342,02	350,21	358,37

Grad.

M.	42	43	44	45	46	47
0	358,37	366,50	374,61	382,68	390,73	398,75
1	358,50	366,64	374,74	382,82	390,86	398,88
2	358,64	366,77	374,88	382,95	391,00	399,02
3	358,78	366,91	375,01	383,09	391,13	399,15
4	358,91	367,04	375,15	383,22	391,27	399,28
5	359,05	367,18	375,28	383,35	391,40	399,42
6	359,18	367,31	375,42	383,49	391,53	399,55
7	359,32	367,45	375,55	383,62	391,67	399,68
8	359,45	367,58	375,68	383,76	391,80	399,82
9	359,59	367,72	375,82	383,89	391,94	399,95
10	359,72	367,85	375,95	384,03	392,07	400,08
11	359,86	367,99	376,09	384,16	392,20	400,22
12	360,00	368,12	376,22	384,30	392,34	400,35
13	360,13	368,26	376,36	384,43	392,47	400,48
14	360,27	368,39	376,49	384,56	392,60	400,62
15	360,40	368,53	376,63	384,70	392,74	400,75
16	360,54	368,67	376,76	384,83	392,87	400,88
17	360,67	368,80	376,90	384,97	393,01	401,02
18	360,81	368,94	377,03	395,10	393,14	401,15
19	360,95	369,07	377,17	385,23	393,27	401,28
20	361,08	369,21	377,30	395,37	393,41	401,41
21	361,22	369,34	377,44	385,50	393,54	401,55
22	361,35	369,48	377,57	385,64	393,67	401,68
23	361,49	369,61	377,71	385,77	393,81	401,81
24	361,62	369,75	377,84	385,91	393,94	401,95
25	361,76	369,88	377,97	386,04	394,08	402,08
26	361,90	370,02	378,11	386,17	394,21	402,21
27	362,03	370,15	378,24	386,31	394,34	402,35
28	362,17	370,29	378,38	386,48	394,48	402,48
29	362,30	370,42	378,51	386,58	394,61	402,61
30	362,44	370,56	378,65	386,71	394,74	402,75

M.	Grad. 42	43	44	45	46	47
30	362,44	370,56	378,65	386,71	394,74	402,75
31	362,57	370,69	378,78	386,85	394,88	402,88
32	362,71	370,83	378,92	386,98	395,01	403,01
33	362,84	370,96	379,05	387,11	395,14	403,15
34	362,98	371,10	379,19	387,25	395,28	403,28
35	363,12	371,23	379,32	387,39	395,41	403,41
36	363,25	571,37	379,46	387,52	395,55	403,15
37	363,39	371,50	379,59	387,65	395,68	403,68
38	363,52	371,64	379,73	387,78	395,81	403,81
39	363,66	371,77	379,86	387,92	395,95	403,94
40	363,79	371,91	379,99	388,05	396,08	404,08
41	363,93	372,04	380,13	388,19	396,21	404,21
42	364,06	372,18	380,26	388,32	396,35	403,34
43	364,20	372,31	380,40	388,45	396,48	404,48
44	364,33	372,45	380,53	388,59	396,61	404,61
45	364,47	372,58	380,67	388,72	396,75	404,74
46	364,61	372,72	380,84	388,86	396,88	404,88
47	[illegible]64,74	372,85	380,94	388,99	397,01	405,01
48	364,88	372,99	381,07	389,12	397,15	405,14
49	365,01	373,12	381,20	389,26	397,28	405,27
50	365,15	373,26	381,34	389,39	397,42	401,41
51	365,28	373,39	381,47	389,53	397,55	405,54
52	365,42	373,53	381,61	389,66	397,68	405,68
53	365,55	373,66	381,74	389,79	397,81	405,81
54	365,69	373,80	381,88	389,93	397,95	405,94
55	365,82	373,93	382,01	390,06	398,08	406,07
56	365,96	374,07	382,15	390,19	398,22	406,20
57	366,10	37[illegible],20	382,28	390,33	398,35	406,34
58	366,23	374,34	382,41	390,46	398,48	406,47
59	366,37	374,47	382,55	390,60	398,62	406,60
60	366,50	374,61	382,68	390,73	398,75	406,74

M.	Grad 48	49	50	51	52	53
0	406,74	414,69	422,62	430,51	438,37	446,20
1	406,87	414,83	422,75	430,64	438,50	446,33
2	407,00	414,96	422,88	430,77	438,63	446,46
3	407,13	415,09	423,01	430,90	438,76	446,59
4	407,27	415,22	423,15	431,04	438,89	446,72
5	407,40	415,35	423,28	431,17	439,02	446,85
6	407,53	415,48	423,41	431,30	439,16	446,98
7	407,67	415,62	423,54	431,43	439,29	447,11
8	407,80	415,75	423,67	431,56	439,42	447,24
9	407,93	415,88	423,80	431,69	439,55	447,37
10	408,06	416,02	423,94	431,82	439,68	447,50
11	408,20	416,15	424,07	431,95	439,81	447,63
12	408,33	416,28	424,20	432,09	439,94	447,76
13	408,46	416,41	424,33	432,22	440,07	447,89
14	408,60	416,54	424,46	432,35	440,20	448,02
15	408,73	416,68	424,59	432,48	440,33	448,15
16	408,86	416,81	424,73	432,61	440,46	448,28
17	408,99	416,94	424,86	432,74	440,59	448,41
18	409,13	417,07	424,99	432,87	440,72	448,54
19	409,26	417,21	425,12	433,00	440,85	448,67
20	409,39	417,34	425,25	433,13	440,98	448,80
21	409,52	417,47	425,38	433,27	441,11	448,93
22	409,66	417,60	425,52	433,40	441,24	449,06
23	409,79	417,73	425,65	433,53	441,38	449,19
24	409,92	417,87	425,78	433,66	441,51	449,32
25	410,06	418,00	425,91	433,79	441,64	449,45
26	410,19	418,13	426,04	433,92	441,77	449,58
27	410,32	418,26	426,17	434,05	441,90	449,71
28	410,45	418,40	426,31	434,18	442,03	449,84
29	410,59	418,53	426,44	434,31	442,16	449,97
30	410,72	418,66	426,57	434,45	442,29	450,10

	Grad.					
M.	48	49	50	51	52	53
30	410,72	418,66	426,57	434,45	442,29	450,10
31	410,85	418,79	426,70	434,58	442,42	450,23
32	410,98	418,92	426,83	434,71	442,55	450,36
33	411,12	419,06	426,96	434,84	442,68	450,49
34	411,25	419,19	427,09	434,97	442,81	450,62
35	411,38	419,32	427,23	435,10	442,94	450,75
36	411,51	419,45	427,36	435,23	443,07	450,88
37	411,65	419,58	427,49	435,36	443,20	451,01
38	411,78	419,72	427,62	435,49	443,33	451,14
39	411,91	419,85	427,75	435,62	443,46	451,27
40	412,04	419,98	427,88	435,75	443,59	451,40
41	412,18	420,11	428,02	435,89	443,72	451,53
42	412,31	420,24	428,15	436,02	443,85	451,66
43	412,44	420,38	428,28	436,15	443,98	451,79
44	412,57	420,51	428,41	436,28	444,11	451,92
45	412,71	420,64	428,54	436,41	444,24	452,05
46	412,84	420,77	428,67	436,54	444,37	452,18
47	412,97	420,90	428,80	436,67	444,50	452,30
48	413,10	421,04	428,94	436,80	444,64	452,43
49	413,24	421,17	429,06	436,93	444,77	452,56
50	413,37	421,30	429,20	437,06	444,81	452,69
51	413,50	421,43	429,33	437,19	445,03	452,82
52	413,63	421,56	429,46	437,32	445,16	452,95
53	413,77	421,70	429,59	437,46	445,29	453,08
54	413,90	421,83	429,72	437,59	445,42	453,21
55	414,03	421,96	429,85	437,72	445,55	453,34
56	414,16	422,09	429,99	437,85	445,68	453,47
57	414,30	422,22	430,12	437,98	445,81	453,60
58	414,43	422,35	430,25	438,11	445,94	453,73
59	414,56	422,49	430,38	438,24	446,07	453,86
60	414,69	422,62	430,51	438,37	446,20	453,99

Grad.						
M.	54	55	56	57	58	59
0	453,99	461,75	469,47	477,16	484,81	492,42
1	454,12	461,81	469,60	477,29	484,94	492,55
2	454,25	462,01	469,73	477,41	485,06	492,68
3	454,38	462,14	469,86	477,54	485,19	492,80
4	454,51	462,26	469,99	477,67	485,32	492,93
5	454,64	462,39	470,11	477,80	485,45	493,06
6	454,77	462,52	470,24	477,92	485,57	493,18
7	454,90	462,65	470,37	478,05	485,70	493,31
8	455,03	462,78	470,50	478,18	185,83	493,44
9	455,16	462,91	470,63	478,31	485,95	493,56
10	455,29	463,04	470,76	478,44	486,01	493,69
11	455,42	463,17	470,88	478,56	486,28	493,82
12	455,54	463,30	471,01	478,69	486,34	493,94
13	455,67	463,42	471,14	478,82	486,46	494,07
14	455,80	463,55	471,27	478,95	486,59	494,19
15	455,93	463,68	471,40	479,07	486,72	494,32
16	456,06	463,81	471,52	479,20	486,84	494,45
17	456,19	463,94	471,65	479,33	486,97	494,57
18	456,32	464,07	471,78	479,46	487,10	494,70
19	456,45	464,20	471,91	479,59	487,22	494,83
20	456,58	464,33	472,04	479,71	487,35	494,95
21	456,71	464,46	472,17	479,84	487,48	495,08
22	456,84	464,58	472,29	479,97	487,61	495,21
23	456,97	464,71	472,42	480,10	487,73	495,33
24	457,10	464,84	472,55	480,22	487,86	495,46
25	457,23	464,97	472,68	480,35	487,99	495,58
26	457,36	465,10	472,81	480,47	488,11	495,71
27	457,49	465,23	472,93	480,60	488,24	495,84
28	457,62	465,36	473,06	480,73	488,37	495,96
29	457,74	465,49	473,19	480,86	488,49	496,09
30	457,87	465,61	473,32	490,99	488,62	496,22

M.	Grad. 54	55	56	57	58	59
30	457,87	465,61	473,32	480,99	488,62	496,22
31	458,00	465,74	473,45	481,12	488,75	496,34
32	458,13	465,87	473,58	481,24	488,87	496,47
33	458,26	466,00	473,70	481,37	489,00	496,60
34	458,39	466,13	473,83	481,50	489,13	496,72
35	458,52	466,26	473,96	481,63	489,26	496,85
36	458,65	466,39	474,09	481,75	489,38	496,97
37	458,78	466,52	474,22	481,88	489,51	497,10
38	458,91	466,64	474,34	482,01	489,64	497,23
39	459,04	466,77	474,47	482,14	489,76	497,35
40	459,17	466,90	474,60	482,26	489,89	497,48
41	459,30	467,03	474,73	482,39	490,02	497,60
42	459,42	467,16	474,86	482,52	490,14	497,73
43	459,55	467,29	474,98	482,65	490,27	497,85
44	459,68	467,42	475,11	482,77	490,40	497,98
45	459,81	467,54	475,24	482,90	490,52	498,11
46	459,94	467,67	475,37	483,03	490,65	498,24
47	460,07	467,80	475,50	483,15	490,78	498,36
48	460,20	467,93	475,62	483,28	490,90	498,49
49	460,33	468,06	475,75	483,41	491,03	498,61
50	460,46	468,19	475,88	483,54	491,16	498,74
51	460,59	468,32	476,01	483,66	491,28	498,87
52	460,72	468,44	476,14	483,79	491,41	498,99
53	460,85	468,57	476,26	483,92	491,54	499,12
54	460,97	468,70	476,39	484,05	491,66	499,24
55	461,10	468,83	476,52	484,17	491,79	499,37
56	461,23	468,96	476,65	484,30	491,92	499,50
57	461,36	469,09	476,78	484,43	492,04	499,62
58	461,49	469,21	476,90	484,56	492,17	499,75
59	461,62	469,34	477,03	484,68	492,30	499,88
60	461,75	469,47	477,16	484,81	492,42	500,00

M.	Grad 60	61	62	63	64	65
0	500,00	507,54	515,04	522,50	529,92	537,30
1	500,12	507,66	515,16	522,62	530,04	537,42
2	500,25	507,79	515,29	522,75	530,17	537,54
3	500,37	507,91	515,41	522,87	530,29	537,66
4	500,50	508,04	515,54	522,99	530,41	537,79
5	500,63	508,16	515,66	523,11	530,53	537,91
6	500,76	508,29	515,79	523,24	530,66	538,04
7	500,88	508,42	515,91	523,36	530,78	538,16
8	501,01	508,54	516,04	523,49	530,91	538,28
9	501,13	508,66	516,16	523,61	531,03	538,40
10	501,26	508,79	516,28	523,74	531,15	538,53
11	501,38	508,92	516,40	523,86	531,27	538,65
12	501,51	509,04	516,53	523,99	531,40	538,77
13	501,63	509,16	516,65	524,11	531,52	538,89
14	501,76	509,29	516,78	524,23	531,65	539,02
15	501,88	509,41	516,90	524,35	531,77	539,14
16	502,01	509,54	517,03	524,48	531,89	539,26
17	502,13	509,66	517,14	524,61	532,01	539,38
18	502,27	509,79	517,28	524,73	532,14	539,51
19	502,39	509,91	517,40	524,85	532,26	559,63
20	502,52	510,04	517,53	524,98	532,38	539,75
21	502,64	510,16	517,65	525,11	532,50	539,87
22	502,77	510,29	517,78	525,22	532,63	540,00
23	502,89	510,41	517,90	525,34	532,75	540,12
24	503,02	510,54	518,03	525,47	532,88	550,24
25	503,14	510,66	518,15	525,59	533,00	540,36
26	503,27	510,79	518,28	525,72	533,12	540,49
27	503,39	510,91	518,40	525,84	533,24	540,61
28	503,52	511,04	518,52	525,97	533,37	540,73
29	503,64	511,16	518,64	526,09	533,49	540,85
30	503,77	511,29	518,77	526,21	533,61	540,97

M.	Grad. 60	61	62	63	64	65
30	503,77	511,29	518,77	526,21	533,61	540,97
31	503,90	511,41	518,89	526,33	533,73	541,09
32	504,03	511,54	519,02	526,46	533,86	541,22
33	504,15	511,66	519,14	526,58	533,98	541,34
34	504,28	511,79	519,27	526,71	534,11	541,46
35	504,40	511,91	519,39	526,83	534,23	541,58
36	504,53	512,04	519,52	526,96	534,35	541,71
37	504,65	512,16	519,64	527,08	534,47	541,83
38	504,78	512,29	519,77	527,20	534,60	541,95
39	504,90	512,41	519,89	527,32	534,72	542,07
40	505,03	512,54	520,02	527,45	534,84	542,20
41	505,15	512,66	520,14	527,57	534,96	542,32
42	505,28	512,79	520,26	527,70	535,09	542,44
43	505,40	512,91	520,38	527,82	535,21	542,56
44	505,53	513,04	520,51	527,94	535,34	542,69
45	505,65	513,16	520,63	528,06	535,46	542,81
46	505,78	513,29	520,76	528,19	535,58	542,93
47	505,90	513,41	520,88	528,31	535,70	543,05
48	506,03	513,54	521,01	528,44	535,83	543,17
49	506,15	513,66	521,13	528,56	535,95	543,29
50	506,28	513,79	521,26	528,69	536,07	543,42
51	506,40	513,91	521,38	528,81	536,19	543,54
52	506,54	514,04	521,51	528,93	536,32	543,66
53	506,66	514,16	521,63	529,05	536,44	543,78
54	506,79	514,29	521,75	529,18	536,56	543,91
55	506,91	514,41	521,87	529,30	536,68	544,03
56	507,04	514,54	522,00	529,43	536,81	544,15
57	507,16	514,66	522,12	529,55	536,93	544,27
58	507,29	514,79	522,25	529,67	537,05	544,40
59	507,41	514,91	522,37	529,80	537,17	544,52
60	507,54	515,04	522,50	529,92	537,30	544,64

Staatl. Bibliothek Passau

	Grad.					
M.	66	67	68	69	70	71
0	544,64	551,94	559,19	566,41	573,58	580,70
1	544,76	552,06	559,31	566,53	573,70	580,82
2	544,88	552,18	559,43	566,65	573,81	580,94
3	545,00	552,30	559,55	566,77	573,93	581,06
4	545,13	552,42	559,68	566,89	574,05	581,18
5	545,25	552,54	559,80	567,01	574,17	581,30
6	545,37	552,66	559,92	567,13	574,29	581,41
7	545,49	552,78	560,04	567,25	574,41	581,53
8	545,61	552,91	560,16	567,36	574,53	581,65
9	545,73	553,03	560,28	567,48	574,65	581,77
10	545,86	553,15	560,40	567,60	574,77	581,89
11	545,98	553,27	560,52	567,72	574,89	582,01
12	546,10	553,39	560,64	567,84	575,01	582,12
13	546,22	553,51	560,76	567,96	575,13	582,24
14	546,35	553,63	560,88	568,08	575,24	582,36
15	546,47	553,75	561,00	568,20	575,36	582,48
16	546,59	553,88	561,12	568,32	575,48	582,60
17	546,71	554,00	561,24	568,44	575,60	582,72
18	546,83	554,12	561,36	568,56	575,72	582,83
19	546,95	554,24	561,48	568,68	575,84	582,95
20	547,08	554,36	561,60	568,80	575,96	583,07
21	547,20	554,48	561,72	568,92	576,08	583,19
22	547,32	554,60	561,84	569,04	576,19	583,31
23	547,44	554,72	561,96	569,16	576,31	583,43
24	547,56	554,84	562,08	569,28	576,43	583,54
25	547,68	554,96	562,20	569,40	576,55	583,66
26	547,81	555,09	562,32	569,52	576,67	583,78
27	547,93	555,21	562,44	569,64	576,79	583,90
28	548,05	555,33	562,56	569,76	576,91	584,01
29	548,17	555,45	562,68	569,88	577,03	584,13
30	548,29	555,57	562,80	570,00	577,15	584,25

	Grad					
M.	66	67	68	69	70	71
30	548,29	555,57	562,80	570,00	577,15	584,25
31	548,41	555,69	562,92	570,12	577,27	584,37
32	548,54	555,81	563,05	570,24	577,38	584,49
33	548,66	555,93	563,17	570,36	577,50	584,61
34	548,78	556,05	563,29	570,47	577,62	584,72
35	548,90	556,17	563,41	570,59	577,74	584,84
36	549,02	556,30	563,53	570,71	577,86	584,96
37	549,14	556,42	563,65	570,83	577,98	585,08
38	549,27	556,54	563,77	570,95	578,10	585,19
39	549,39	556,66	563,89	571,07	578,22	585,31
40	549,51	556,78	564,01	571,19	578,33	585,43
41	549,63	556,90	564,13	571,31	578,45	585,55
42	549,75	557,02	564,25	571,43	578,57	585,67
43	549,87	557,14	564,37	571,55	578,69	585,79
44	550,00	557,26	564,49	571,67	578,81	585,90
45	550,12	557,38	564,61	571,79	578,93	586,02
46	550,24	557,50	564,73	571,91	579,04	586,14
47	550,36	557,62	564,85	572,03	579,16	586,26
48	550,48	557,75	564,97	572,15	579,28	586,37
49	550,60	557,87	565,09	572,27	579,40	586,49
50	550,72	557,99	565,21	572,38	579,52	586,61
51	550,84	558,11	565,33	572,50	579,64	586,73
52	550,97	558,23	565,45	572,62	579,76	586,84
53	551,09	558,35	565,57	572,74	579,88	586,96
54	551,21	558,47	565,69	572,86	579,99	587,08
55	551,33	558,59	565,81	572,98	580,11	587,20
56	551,45	558,71	565,93	573,10	580,23	587,31
57	551,57	558,83	566,05	573,22	580,35	587,43
58	551,69	558,95	566,17	573,34	580,47	587,55
59	551,81	559,07	566,29	573,46	580,59	587,67
60	551,94	559,19	566,41	573,58	580,70	587,79

	Grad.					
M.	72	73	74	75	76	77
0	587,79	594,82	601,82	608,76	615,66	622,51
1	587,91	594,94	601,94	608,83	615,78	622,63
2	588,02	595,06	602,05	608,99	615,89	622,74
3	588,14	595,18	602,17	609,11	616,01	622,86
4	588,26	595,29	602,28	609,22	616,12	622,97
5	588,38	595,41	602,40	609,34	616,24	623,09
6	588,49	595,52	602,51	609,45	616,35	623,20
7	588,61	595,64	602,63	609,57	616,47	623,32
8	588,73	595,76	602,74	609,68	616,58	623,43
9	588,85	595,88	602,86	609,80	616,70	623,54
10	588,96	595,99	602,98	609,91	616,81	623,65
11	589,08	596,11	603,10	610,03	616,93	623,77
12	589,20	596,22	603,21	610,15	617,04	623,88
13	589,32	596,34	603,33	610,27	617,15	624,00
14	589,43	596,46	603,44	610,38	617,26	624,11
15	589,55	596,58	603,56	610,50	617,38	624,23
16	589,67	596,69	603,67	610,61	617,49	624,34
17	589,79	596,81	603,79	610,73	617,61	624,45
18	589,90	596,93	603,90	610,84	617,72	624,56
19	590,02	597,05	604,02	610,96	617,84	624,68
20	590,14	597,16	604,14	611,07	617,95	624,79
21	590,26	597,28	604,26	611,19	618,07	624,91
22	590,37	597,39	604,37	611,30	618,18	625,02
23	590,49	597,51	604,49	611,42	618,30	625,14
24	590,61	597,63	604,60	611,53	618,41	625,25
25	590,73	597,75	604,72	611,65	618,53	635,36
26	590,84	597,86	604,83	611,76	618,64	625,47
27	590,96	597,98	604,95	611,88	618,76	625,59
28	591,08	598,09	605,06	611,99	618,87	625,70
29	591,20	598,21	605,18	612,11	618,99	625,82
30	591,31	598,32	605,29	612,22	619,09	625,93

	Grad.					
M.	72	73	74	75	76	77
30	591,31	598,32	605,29	612,22	619,09	625,93
31	591,43	598,44	605,41	612,33	619,20	626,04
32	591,54	598,56	605,53	612,45	619,32	626,15
33	591,66	598,68	605,65	612,57	619,43	626,26
34	591,78	598,79	605,76	612,68	619,55	626,38
35	591,90	598,91	605,88	612,80	619,66	626,49
36	592,01	599,02	605,99	612,91	619,78	626,60
37	592,13	599,14	606,11	613,02	619,89	626,71
38	592,25	599,26	606,22	613,14	620,01	626,83
39	592,37	599,38	606,34	613,26	620,12	626,94
40	592,48	599,49	606,45	613,37	620,24	627,06
41	592,60	599,61	606,57	613,49	620,35	627,17
42	592,72	599,72	606,68	613,60	620,46	627,28
43	592,84	599,84	606,80	613,72	620,57	627,39
44	592,95	599,95	606,91	613,83	620,69	627,51
45	593,07	600,07	607,03	613,95	620,80	627,62
46	593,18	600,19	607,14	614,06	620,92	627,74
47	593,30	600,30	607,26	614,17	621,03	627,85
48	593,42	600,42	607,38	614,29	621,15	627,96
49	593,54	600,54	607,50	614,40	621,26	628,07
50	593,65	600,65	607,61	614,51	621,38	628,19
51	593,77	600,77	607,73	614,63	621,49	628,30
52	593,89	600,89	607,84	614,74	621,60	628,42
53	594,01	601,00	607,96	614,86	621,71	628,53
54	594,12	601,12	608,07	614,97	621,83	628,64
55	594,24	601,24	608,19	615,09	621,94	628,75
56	594,36	601,35	608,30	615,20	622,06	628,87
57	594,48	601,47	608,42	615,32	622,17	628,98
58	594,59	601,58	608,53	615,43	622,29	628,09
59	594,71	601,70	608,65	615,55	622,40	629,20
60	594,82	601,82	608,76	615,66	622,51	629,32

	Grad.					
M.	78	79	80	81	82	83
0	629,32	636,08	642,79	649,45	656,06	662,62
1	629,44	636,20	642,90	649,56	656,17	662,73
2	629,55	636,31	643,01	649,67	656,28	662,84
3	629,67	636,42	643,12	649,79	656,39	662,95
4	629,78	636,53	643,23	649,90	656,50	663,06
5	629,89	636,65	643,35	650,01	656,61	663,17
6	630,00	636,76	643,46	650,11	656,72	663,27
7	630,11	636,87	643,57	650,22	656,83	663,38
8	730,22	636,98	643,68	650,33	656,94	663,49
9	630,34	637,09	643,79	650,44	657,05	663,60
10	630,45	637,20	643,90	650,55	657,16	663,71
11	630,57	637,31	644,01	650,66	657,27	663,82
12	630,68	637,42	644,12	650,77	657,38	663,93
13	630,79	637,54	644,24	650,89	657,49	664,04
14	630,90	237,65	644,35	651,00	657,59	664,14
15	631,02	637,76	644,46	651,11	657,70	664,25
16	631,13	637,87	644,57	651,22	657,81	664,36
17	631,25	637,99	644,68	651,33	657,92	664,47
18	631,36	638,10	644,79	651,44	658,03	664,58
19	631,47	638,21	644,90	651,55	658,14	664,69
20	631,58	638,32	645,01	651,66	658,25	664,80
21	631,70	638,43	645,12	651,77	658,36	664,91
22	631,81	638,54	645,24	651,88	658,47	665,01
23	631,92	638,66	645,35	651,99	658,58	665,12
24	632,03	638,77	645,46	652,10	658,69	665,23
25	632,15	638,88	645,57	652,21	658,80	665,34
26	632,26	638,99	645,68	652,32	658,91	665,45
27	632,37	639,11	645,79	652,43	659,02	665,59
28	632,48	639,22	645,90	652,54	659,13	665,66
29	632,60	639,33	646,01	652,65	659,24	665,77
30	632,71	639,44	646,12	652,76	659,35	665,88

	Grad.					
M.	78	79	80	81	82	83
30	632,71	639,44	646,12	652,76	659,35	665,88
31	632,82	639,55	646,23	652,87	659,46	665,99
32	632,93	639,66	646,35	652,98	659,56	666,10
33	633,04	639,77	646,46	653,09	659,67	666,21
34	633,16	639,89	646,57	653,20	659,78	666,32
35	633,27	640,00	646,68	653,31	659,89	666,43
36	633,38	640,11	646,79	653,42	660,00	666,53
37	633,49	640,22	646,90	653,53	660,11	666,64
38	633,61	640,33	647,01	653,64	660,22	666,75
39	633,72	640,44	647,12	653,75	660,33	666,86
40	633,83	640,56	647,23	653,86	660,44	666,97
41	633,94	640,67	647,34	653,97	660,55	667,08
42	634,06	640,78	647,46	654,08	660,66	667,18
43	634,17	640,89	647,57	654,19	660,77	667,29
44	634,28	641,00	647,68	654,30	660,88	667,40
45	634,39	641,11	647,79	654,41	660,99	667,51
46	634,51	641,23	647,90	654,52	661,09	667,62
47	634,62	641,34	648,01	654,63	661,20	667,73
48	634,73	641,45	648,12	654,74	661,31	667,83
49	634,84	641,56	648,23	654,85	661,42	667,94
50	634,96	641,67	648,34	654,96	661,53	668,05
51	635,07	641,78	648,45	655,07	661,64	668,16
52	635,18	641,90	648,56	655,18	661,75	668,27
53	635,29	642,01	648,67	655,29	661,86	668,38
54	635,40	642,12	648,78	655,40	661,97	668,48
55	635,51	642,23	648,89	655,51	662,08	668,59
56	635,63	642,34	649,01	655,62	662,18	668,70
57	635,74	642,45	649,12	655,73	662,29	668,81
58	635,85	642,56	649,23	655,84	662,40	668,91
59	635,96	642,67	649,34	655,95	662,51	669,02
60	636,08	642,79	649,45	656,06	662,62	669,13

	Grad.					
M.	84	85	86	87	88	89
0	669,13	675,59	682,00	688,35	694,66	700,91
1	669,24	675,70	682,11	688,46	694,77	701,01
2	669,35	675,80	682,21	688,57	694,87	701,12
3	669,46	675,91	682,32	688,68	694,98	701,22
4	669,56	676,02	682,42	688,78	695,08	601,32
5	669,67	676,13	682,53	688,89	695,19	701,42
6	669,78	676,23	682,64	688,99	695,29	701,53
7	669,89	676,34	682,75	689,10	695,40	701,63
8	669,99	676,45	682,85	689,20	695,50	701,74
9	670,10	676,55	682,96	689,31	695,60	701,84
10	670,21	676,66	683,06	689,41	695,70	701,95
11	670,32	676,77	683,17	689,52	695,81	702,05
12	670,43	676,88	683,27	689,62	695,91	702,15
13	670,54	676,99	683,38	689,73	696,01	702,25
14	670,64	677,09	683,49	689,83	696,12	702,36
15	670,75	677,20	683,60	689,94	696,22	702,46
16	670,86	677,30	683,70	690,04	696,33	702,57
17	670,97	677,41	683,81	690,15	696,43	702,67
18	671,07	677,52	683,91	690,25	696,54	702,77
19	671,18	677,63	684,02	690,36	696,64	732,87
20	671,29	677,73	684,12	690,46	696,75	702,98
21	671,40	677,84	684,23	690,57	696,85	703,08
22	671,51	677,95	684,34	690,67	696,96	703,19
23	671,62	678,06	684,45	690,78	697,06	703,29
24	671,72	678,16	684,55	690,88	697,16	703,39
25	671,83	678,27	684,66	690,99	697,27	703,49
26	671,94	678,38	684,76	691,09	697,37	703,60
27	672,05	678,48	684,87	691,20	697,47	703,70
28	672,15	678,59	684,97	691,30	697,58	703,81
29	672,26	678,70	685,08	691,41	697,68	703,91
30	672,37	678,80	685,18	691,51	697,79	704,01

	Grad.					
M.	84	85	86	87	88	89
30	672,37	678,80	685,18	691,51	697,79	704,01
31	672,47	678,90	685,28	691,61	697,90	704,11
32	672,58	679,01	685,39	691,72	698,00	704,22
33	672,69	679,12	685,49	691,82	698,11	704,32
34	672,80	679,23	685,60	691,93	698,21	704,43
35	672,90	679,33	685,71	692,03	698,31	704,53
36	673,01	679,44	685,82	692,14	698,42	704,63
37	673,12	679,55	685,92	692,24	698,52	704,73
38	673,23	679,65	686,03	692,35	698,62	704,84
39	673,33	679,76	686,13	692,45	698,72	704,94
40	673,44	679,87	686,24	692,56	698,83	705,05
41	673,55	679,87	686,34	692,66	698,93	705,15
42	673,66	680,08	686,45	692,77	699,04	705,25
43	673,76	680,18	686,55	692,87	699,14	705,35
44	673,87	680,29	686,66	692,98	699,25	705,46
45	673,98	680,39	686,76	693,08	699,35	705,56
46	674,09	680,50	686,88	693,19	699,46	705,67
47	674,19	680,61	686,98	693,29	699,56	705,77
48	674,30	680,72	687,09	693,40	699,66	705,87
49	674,41	680,82	687,19	693,50	699,76	705,97
50	674,52	680,93	687,30	693,61	699,87	706,08
51	674,62	681,03	687,40	693,71	699,97	706,18
52	674,73	681,14	687,51	693,82	700,08	706,28
53	674,84	681,25	687,61	693,92	700,18	706,38
54	674,95	681,36	687,72	694,03	700,29	706,49
55	675,05	681,46	687,82	694,13	700,39	706,59
56	675,16	681,57	687,93	694,24	700,49	706,70
57	675,27	681,67	688,03	694,34	700,59	706,80
58	675,38	681,78	688,14	694,45	700,70	706,90
59	675,48	681,89	688,24	694,55	700,80	707,00
60	675,59	682,00	688,35	694,66	700,91	707,11

M.	Grad. 90	91	92	93	94	95
0	707,11	713,25	719,34	725,37	731,35	737,28
1	707,21	713,35	719,44	725,47	731,45	737,38
2	707,31	713,45	719,54	725,57	731,55	737,47
3	707,41	713,55	719,64	725,67	731,65	737,57
4	707,52	713,66	719,74	725,77	731,75	737,67
5	707,62	713,76	719,84	725,87	731,85	737,77
6	707,72	713,86	719,95	725,97	731,95	737,87
7	707,82	713,96	720,05	726,07	732,05	737,97
8	707,93	714,07	720,15	726,17	732,15	738,06
9	708,03	714,17	720,25	726,27	732,25	738,16
10	708,13	714,27	720,35	726,37	732,34	738,26
11	708,23	714,37	720,45	726,47	732,44	738,36
12	708,34	714,47	720,55	726,57	732,54	738,46
13	708,44	714,57	720,65	726,67	732,64	738,56
14	708,55	714,68	720,75	726,77	732,74	738,65
15	708,65	714,78	720,85	726,87	732,84	738,75
16	708,75	714,88	720,95	726,97	732,94	738,85
17	708,85	714,98	721,06	727,07	733,04	738,95
18	708,96	715,08	721,16	727,17	733,14	739,04
19	709,06	715,18	721,26	727,27	733,24	739,14
20	709,16	715,29	721,36	727,37	733,33	739,24
21	709,26	715,39	721,46	727,47	733,43	739,34
22	709,37	715,49	721,56	727.57	733,53	739,44
23	709,47	715,59	721,66	727,67	733,63	739,54
24	709,57	715,69	721,76	727,77	733,73	739,63
25	709,67	715,79	721,86	727,87	733,83	739,73
26	709,78	715,90	721,96	727,97	733,93	739,83
27	709,88	716,00	722,06	728,07	734,03	739,93
28	709,98	716,10	722,16	728,17	734,13	740,02
29	710,08	716,20	722,26	728,27	734,23	740,12
30	710,19	716,30	722,36	728,37	734,32	740,22

	Grad.					
M.	90	91	92	93	94	95
30	710,19	716,30	722,36	728,37	734,32	740,22
31	710,29	716,40	722,46	728,47	734,42	740,32
32	710,39	716,50	722,57	728,57	734,52	740,41
33	710,49	716,61	722,67	728,67	734,62	740,51
34	710,59	716,71	722,77	728,77	734,72	740,61
35	710,69	716,81	722,87	728,87	734,82	740,71
36	710,80	716,91	722,97	728,97	734,91	740,80
37	710,90	717,01	723,07	729,07	735,01	740,90
38	711,00	717,11	723,17	729,17	735,11	741,00
39	711,10	717,21	723,27	729,27	735,21	741,10
40	711,21	717,32	723,37	729,37	735,31	741,20
41	711,31	717,42	723,47	729,47	735,41	741,30
42	711,41	717,52	723,57	729,57	735,51	741,39
43	711,51	717,62	723,67	729,67	735,61	741,49
44	711,62	717,72	723,77	729,76	735,70	741,59
45	711,72	717,82	723,87	729,86	735,80	741,69
46	711,82	717,92	723,97	729,96	735,90	741,78
47	711,92	718,02	724,07	730,06	736,00	741,88
48	712,03	718,13	724,17	730,16	736,10	741,98
49	712,13	718,23	724,27	730,26	736,20	742,08
50	712,23	718,33	724,37	730,36	736,29	742,17
51	712,33	718,43	724,47	730,46	736,39	742,27
52	712,43	718,53	724,57	730,56	736,49	742,37
53	712,54	718,63	724,67	730,66	736,59	742,47
54	712,64	718,73	724,77	730,76	736,69	742,56
55	712,74	718,83	724,87	730,86	736,79	742,66
56	712,84	718,94	724,97	730,96	736,88	742,76
57	712,94	719,04	725,07	731,06	736,98	742,86
58	713,05	719,14	725,17	731,16	737,08	742,95
59	713,15	719,24	725,27	731,26	737,18	743,05
60	713,25	719,34	725,37	731,35	737,28	743,15

	Grad.			
M.	96	97	98	99
0	743,15	748,96	754,71	760,41
1	743,24	749,06	754,81	760,51
2	743,34	749,15	754,90	760,60
3	743,44	749,25	755,00	760,69
4	743,53	749,34	755,09	760,78
5	743,63	749,44	755,19	760,88
6	743,73	749,53	755,28	760,97
7	743,83	749,63	755,38	761,07
8	743,92	749,73	755,47	761,16
9	744,02	749,83	755,57	761,26
10	744,12	749,92	755,66	761,35
11	744,22	750,02	755,76	761,45
12	744,31	750,11	755,85	761,54
13	744,41	750,21	755,95	761,64
14	744,51	750,30	756,04	761,73
15	744,60	750,40	756,14	761,83
16	744,70	750,50	756,23	761,92
17	744,80	750,60	756,33	762,02
18	744,89	750,69	756,42	762,11
19	744,99	750,79	756,52	762,20
20	745,09	750,88	756,61	762,29
21	745,19	750,98	756,71	762,39
22	745,28	751,07	756,80	762,48
23	745,38	751,17	756,90	762,58
24	745,48	751,26	757,00	762,67
25	745,58	751,36	757,10	762,77
26	745,67	751,46	757,19	762,86
27	745,77	751,56	757,29	762,96
28	745,87	751,65	757,38	763,05
29	745,96	751,75	757,48	763,14
30	746,06	751,84	757,57	763,23

M.	Grad. 96	97	98	99
30	746,06	751,84	757,57	763,23
31	746,16	751,94	757,67	763,33
32	746,25	752,03	757,76	763,42
33	746,35	752,13	757,85	763,52
34	746,44	752,22	757,94	763,61
35	746,54	752,32	758,04	763,71
36	746,64	752,41	758,13	763,80
37	746,74	752,51	758,23	763,90
38	746,83	752,61	758,32	763,99
39	746,93	752,71	758,42	764,08
40	747,03	752,80	758,51	764,17
41	747,13	752,90	758,61	764,27
42	747,22	752,99	758,70	764,36
43	747,32	753,09	758,80	764,46
44	747,41	753,18	758,89	764,55
45	747,51	753,28	758,99	764,65
46	747,60	753,37	759,08	764,74
47	747,70	753,47	759,18	764,83
48	747,80	753,56	759,27	764,92
49	747,90	753,66	759,37	765,02
50	747,99	753,75	759,46	765,11
51	748,09	753,85	759,56	765,21
52	748,18	753,95	759,65	765,30
53	748,28	754,05	759,75	765,40
54	748,38	754,14	759,84	765,49
55	748,48	754,24	759,94	765,58
56	748,57	754,33	760,03	765,67
57	748,67	754,43	760,13	765,77
58	748,76	754,52	760,22	765,86
59	748,86	754,62	760,32	765,96
60	748,96	754,71	760,41	766,05

Um einen Winkel, welchen man mit dem Meßtische bestimmen und durch seine Gradtheile ausdrücken will, noch genauer zu erhalten, kann man sich auch hier der bei andern Winkel-Meßwerkzeugen, als: dem Theodoliten, dem Bordaischen Kreise u. s. w. üblichen Multiplications- oder Repetitions-Methode bedienen. Sei z. B. (Fig. 28) der Winkel BAC zu nehmen. Man zieht auf dem Meßtische zuerst die Diagonalen mp und no, so bestimmt deren Durchschnittspunkt a den Mittelpunkt der Bewegung des Meßtisches oder sein Zentrum; dann aber, wie oben gelehrt worden, die Visirlinie ab, ac auf dem Meßtisch aus diesem Punkte a, welcher zuvor genau senkrecht über A gebracht worden (mittelst der Einlothzange), und beschreibt nun aus a mit einem Halbmesser von bekannter Größe, etwa der Länge des Maaßstabes gleich, einen Kreis, läßt das Diopter-Fernrohr in seiner Lage an der Visirlinie ac und drehet nun den Meßtisch mit der Schraube ohne Ende, ohne seine horizontale Lage zu stören, so lange herum, bis man wieder den Gegenstand B gehörig durch das Fadenkreuz gedeckt sieht, hebt das Diopter-Fernrohr behutsam ab, stellt es in die ungefähre Richtung nach C und markirt, nachdem man es gehörig eingerichtet hat, den Durchschnitt c″ dieser Visirlinie auf dem Kreise; so ist offenbar der Winkel bac″ das Doppelte des zu messenden Winkels. Dieses Verfahren kann man nun wiederholen, so oft man es für nöthig achtet. Fiele nun nach nmaligen Wiederholungen die Visirlinie ac^n genau mit jener ersten ab zusammen, indem der Meßtisch einmal um seine Achse gedreht worden, so ist offenbar $\frac{360^0}{n} = \angle BAC$, und man bedarf also keiner weitern Vorkehrungen, um

um den Winkel zu bestimmen, als diese höchst einfache und doch ein genaues Resultat gebende Rechnung. Fiele indeß die Visirlinie a c^n noch vor jene a b, oder die c^{n+1} hinter a b, aber nahe dabei; so wird man die Winkel c^n a b und b a c^{n+1} nach dem Vorhergehenden bestimmen und in Rechnung bringen können. Sei nämlich dieser Winkel $= x$ gefunden, so ist im ersten Falle $\frac{360^0 - x}{n} = \angle$ BAC; im andern Falle $\frac{360^0 + x}{n+1} = \angle$ BAC, wie dies ohne weitere Erläuterung einem Jeden klar sein wird.

Man habe z. B. nach 6maliger Wiederholung der Operation gefunden, daß der Punkt c^6 um Etwas von dem Anfangspunkt b gefallen wäre, und daß die Sehne des kleinen Winkels auf einem Maaßstabe, nach welchem der Halbmesser des beschriebenen Kreises 600 beträgt, die Größe $= 64$ habe; so ist nach dem Vorherigen

$$\frac{64}{2.600} = 0{,}0533 = \sin. x = \sin. 5^0 4', \text{ mithin } x = 6^0 8'$$

und ferner

$$\angle \text{BAC} = \frac{360^0 - 6^0 8'}{6} = \frac{353^0 52'}{6} = 58^0 58' 40''.$$

Auf ähnliche Weise fände man bei einem Halbmesser von gleicher Größe nach 9maliger Repetition, daß die Sehne des Winkels, welche über den Anfangspunkt hinausgefallen ist, 47 betrage, so ist:

$$\frac{47}{2.600} = 0{,}0391 = \sin. x = \sin. 2^0 15', \text{ mithin } x = 4^0 30',$$

demnach aber

$$\angle \text{BAC} = \frac{360^0 + 4^0 30'}{9} = \frac{364^0 30'}{9} = 40^0 30'.$$

Soll dieses Verfahren ein noch genaueres Resultat liefern, so beachte man Folgendes:

1) Die Messung der Sehne des Bogens muß durchaus mit Hülfe eines Stangenzirkels, der mit einer Mikrometerschraube versehen ist und an beiden Spitzen Loupen hat, verrichtet werden.

2) Auf dem zu dieser Messung gewählten tausendtheiligen Maaßstabe suche man entweder die Zehntausendtheile durch Schätzung zwischen den Parallelen, oder man wende zu deren genauerer Bestimmung die Mikrometerschraube des Stangenzirkels auf die Weise an, wie auf der 52sten Seite gelehrt worden.

3) Man ziehe die auf dem Kreise anzugebenden Durchschnittslinien nicht mit einem Bleistifte, sondern mit der Spitze des Federmessers, doch so, daß das zu dieser Operation gewählte starke Velinpapier nicht ganz durchschnitten wird.

4) Da man nicht sicher ist, daß der Punkt a auf dem Meßtischblatte mit dem Mittelpunkte der Bewegung des Meßtisches in einer Vertikale liegt, und leicht durch das Gegentheil eine Excentricität statt finden kann; so wird die Bestimmung des Winkels am sichersten erreicht, wenn der Anfangspunkt b der zu wiederholenden Winkelzeichnung, nach Beendigung des ersten Verfahrens nach und nach in allen vier Quadranten des Kreises, z. B. in b, b', b'' und zuletzt in b''' angenommen wird. Hat man nach und nach sowohl von b, als auch von b', von b'' und endlich von b''' das erst beschriebene Verfahren angewendet, so wird man auch vier verschieden gelegene Sehnen, bc^{n+1}, $b'd$, $b''e$ und $b'''f$, messen können; diese

Sehnen bestimmen sodann die vier Winkel bac^{n+1}, $b'ad$, $b''ae$ und $b'''af$, die dann um so genauer zur Bestimmung des einfachen Winkels dienen. Man nimmt sodann entweder aus den vier gemessenen Sehnen das arithmetische Mittel, oder man sucht für jede Sehne die Größe des zugehörigen Winkels nach Graden, Minuten und Sekunden. So ist, wenn $n+1$ die bei jeder der vier Operationen angewendeten Wiederholungen bezeichnet,

$$\angle BAC = \frac{4 \cdot 360^0 \pm (\angle bac^{n+1} + \angle b'ad + \angle b''ae + \angle b'''af)}{4(n+1)}$$

Das Zeichen + gilt in obiger Formel, wenn die letzte Visirlinie ac^{n+1} über die erste Visirlinie ab hinausfällt, mithin die Summe der gezeichneten Winkel die ganze Peripherie des Kreises um den Winkel bac^{n+1} übersteigt. Im Gegentheil gilt das Zeichen —.

Um bei dergleichen Wiederholungen die größtmögliche Genauigkeit zu erhalten, müßte man übrigens das Diopter-Lineal oder Fernrohr besonders zu diesem Zwecke einrichten lassen, indem nämlich die Drehung desselben um die Anschlagnadel eine Excentricität hervorbringt, müßte in der Kante eine Aushöhlung von der halben Nadelstärke gerade in der Mitte der Länge angebracht werden, so daß sich also nunmehr die Kante genau um den Mittelpunkt der Nadel drehet.

Ich habe in der Praxis mich mehrmals vollkommen überzeugt, daß auf die eben beschriebene Weise der Meßtisch die Winkel mit einem 600 Thaler kostenden Theodoliten bis auf 3″ übereinstimmend angab.

Fünfter Abschnitt.

Gebrauch des Meßtisches zur Bestimmung unzugänglicher Weiten, zur Absteckung von Parallelen, zur Aufnahme von Grundstücken und zur Entwerfung des geometrischen Netzes einer aufzunehmenden Gegend.

Die Art, wie man den Meßtisch behandelt, um mit dem möglich geringsten Zeit- und Kostenaufwand eine Gegend aufzunehmen, wird durch die Beschaffenheit dieser Gegend selbst und der einzelnen darin vorkommenden Theile mannigfach bedingt. So erfordert die Aufnahme einer freien Ebene eine andere Behandlung als die eines waldreichen Landstrichs, eines Dorfes u. s. w. Der Feldmesser muß sich mit den Hauptgränzen derselben bekannt machen und auf Ort und Stelle immer die Verfahrungsart einschlagen, welche ihn auf die kürzeste Weise zum Ziele bringt. Ehe wir hier das Verfahren bei einzelnen angenommenen Fällen erläutern, müssen wir uns indeß noch mit dem allgemeinen in jedem Falle zu beobachtenden bekannt machen.

Nachdem die Standlinie gemessen ist, wird sie in einer solchen Lage auf das Meßtischblatt nach dem ange-

nommenen Maaßstabe aufgetragen, wie man es in jedem Falle am zweckmäßigsten findet, nahe am Rande oder in der Mitte u. s. w., je nachdem die aufzunehmende Gegend auf einer oder zu beiden Seiten u. s. w. der gemessenen Linie liegt. Die Endpunkte der Linie werden genau bezeichnet, wenn man sie mit einem kleinen Kreise umgiebt, um sie nicht unkennbar zu machen; an den Rändern des Blattes aber bemerkt man die Verlängerungen derselben, um hier das Diopter-Lineal genauer als an die kürzere Standlinie anlegen zu können, durch völliges Ausziehen aber nicht unnöthig das Blatt zu beschmutzen.

Auf einem jeden Standpunkte, welchen man im Fortgange der Aufnahme betritt, wird es nothwendig, seinen Meßtisch zu orientiren, d. h. ihm eine solche Lage zu geben, daß die bereits auf dem Blatte niedergelegten Linien eine parallele Lage mit jenen erhalten, deren Bilder sie sind. Man kann dies auf verschiedene Weise erreichen. Früher bediente man sich hierzu der Orientir-Boussole, welche oben beschrieben worden, und sie kann auch jetzt noch bei manchen Fällen, wo man wegen zu beschränkter Aussicht die Lehmannsche Methode nicht anwenden kann, nicht entbehrt werden, wenn man sich nicht etwa mit der Auffindung der wahren Mittagslinie befassen muß, wie dies auch weiter unten näher gezeigt werden soll. Am leichtesten und richtigsten wird indeß das Orientiren des Meßtisches dadurch bewirkt, daß man ausgezeichnete Punkte gewählt hat, zwischen welchen, oder in deren Verlängerung die aufzunehmenden Linien fallen und welche Lehmann die Alignements nennt, dann auch die verschiedenen Arten, um zu seinem Zwecke zu gelangen, angiebt, welche weiter unten näher beleuchtet werden sollen.

Sehr häufig ist dem Meßtisch der Vorwurf gemacht worden, daß das Horizontalstellen, daß Aufstellen über einen Punkt, so daß das Bild desselben auf dem Blatte genau senkrecht über dem Punkt des Bodens liege, und das vorhin genannte Orientiren nur versuchsweise geschehen könnte. Man hat selbst bogenreiche Werke, welche diese Mängel zergliedern und Mittel dagegen angeben, erscheinen lassen; und doch werden diese gerügten Gebrechen verschwinden, wenn man einen nur einigermaaßen geschickten Arbeiter voraussetzt. So hat man als einen großen Uebelstand geschildert, daß, nachdem man den Meßtisch mit der Einlothzange gehörig über den betreffenden Punkt aufgestellt, dadurch daß das Blatt sich beim Orientiren um seinen Mittelpunkt bewege, jene erste Operation wieder ungültig gemacht und der betreffende Punkt durch die Drehung in einem Kreise aus der senkrechten Stellung gebracht würde. Allein es ist leicht einzusehen, daß wenn man schon vorher ein paar zur Orientirung dienende Nadeln in die Endpunkte der Linie sticht, welche man in die Vertikal=Ebene durch ein paar Objekte bringen will, durch das Visiren über diese Nadeln nach einem der bestimmten Gegenstände, man dem Blatte schon seine ungefähr richtige Lage geben kann. Bringt man nun den betreffenden Punkt senkrecht über den des Bodens und richtet das Blatt vollends ein, so wird die Drehung jenes Punktes kaum bemerkbar sein, höchstens einen halben Zoll betragen, und also einen so unbedeutenden Fehler verursachen, daß derselbe gegen andere unvermeidliche Fehler bei jeder andern Art des Aufnehmens mit andern Werkzeugen verschwindend ist.

Bei den durch die Beschaffenheit des einzelnen Grundstückes, welches aufgenommen werden soll, bestimmte Arten den Meßtisch zu behandeln, kann man folgende unterscheiden:

1. Das Vorwärtsvisiren und Messen — so nenne ich die Operationen, mittelst welchen man aus einem einzigen Standorte, wo man den Meßtisch aufstellt, durch das Niederlegen der Winkel, welchen die durch die in Grund zu legenden Gegenstände gelegten Vertikal-Ebenen im Standorte mit einander einschließen, und das unmittelbare Messen der Entfernung jedes einzelnen Objekts vom Standorte, die Punkte auf dem Meßtisch bestimmt, welche denen auf dem Felde verhältnißmäßig liegen. Daß diese Art des Aufnehmens viel Zeit und Kosten erfordert, ist leicht einzusehen, man wird sie daher so viel als möglich zu vermeiden suchen; oft aber werden Fälle eintreten, wo man sie anwenden muß, wie dies in der Folge klar werden wird.

2. Das Umziehen, oder aus dem Umfange aufnehmen — so dürfte man das Verfahren benennen, wenn man den Meßtisch über jeden Winkelpunkt der aufzunehmenden Figur aufstellt, so alle Winkel, welche die Umfangslinien mit einander bilden, niederlegt und die Umfangslinien unmittelbar mißt. Außer dem Zeit- und Kostenaufwand, welchen dieses Verfahren erfordert, hat es noch den großen Nachtheil, einer Menge von bedeutenden Fehlern ausgesetzt zu sein, welche nur durch die größte Genauigkeit, die natürlich aber jene beiden ersten Mängel erhöhen muß, vermieden werden können. Grundstücke, welche keine freie Aussicht über ihren Flächenraum ge-

statten und auch nicht von einer frei zu übersehenden Ebene umgeben sind, z. B. Abschnitte eines Waldes, mit Wald umgebene Brücher, Seen u. s. w., machen indeß diese Behandlungsart nothwendig. Die kurzen Strecken, welche man hier nur übersehen kann, machen die Einrichtung des Meßtisches, das Orientiren desselben höchst schwierig; die Orientir-Boussole wird hier unentbehrlich, doch auch diese giebt, wie schon oben angegeben, nur unzuverlässige Resultate. Wenn es daher irgend erlaubt ist, wird man sich dadurch zu helfen suchen, daß man Diagonalen von einem Winkelpunkt zum andern kennbar macht, in einem Walde durchlichten läßt, bei einem Sumpfe durch hohe Stangen aussteckt u. s. w., um diese zur Orientirung des Meßtisches zu benutzen; übrigens aber wird man alle Genauigkeit anwenden müssen, wie dies noch näher bei den in diesen Fall einschlagenden Aufgaben angegeben werden wird.

3. Das Vorwärtsvisiren und Vorwärtsabschneiden — so könnte man das weniger Zeit und Kosten erfordernde und doch große Genauigkeit gewährende Verfahren benennen, wenn man aus den Endpunkten einer Standlinie, welche gemessen und aufgetragen ist, die Winkel, welche die durch die betreffenden Objekte und die Endpunkte gelegten Vertikal-Ebenen mit den durch die Standlinie selbst gedachten niederlegt, mithin Winkel construirt, welche, indem man an die verhältnißmäßige Grundlinie gleiche Winkel anträgt, denen auf dem Felde gedachten ähnlich sein müssen, so daß also der Scheitelpunkt eines solchen Dreiecks die verhältnißmäßige Lage des Objekts gegen die Standlinie angeben muß. Daß

diese Art des Aufnehmens einen hohen Grad der Genauigkeit geben kann, wenn man übrigens mit einiger Gewandtheit arbeitet, ist eben so klar, als daß sie wegen der Vermeidung mehrerer unmittelbaren Längenmessungen, wie z. B. bei den Aufnahmen mit der Boussole und dem Winkel-Reflector nach dem gebräuchlichen Schlendrian *) zur Ungebühr vorgenommen werden, weniger zeit- und geldraubend ist. Man wendet dies Verfahren besonders dazu an, um geometrische Netze über eine aufzunehmende Gegend zu legen, d. h. die Lage gewisser Punkte gegen einander, welche man bei Aufnahme der Einzelnheiten als Standorte oder Richtobjekte wählen muß, mit Genauigkeit zu bestimmen; wie es aber auch ferner zu Aufnahme der Einzelnheiten selbst angewendet wird, werden die hier einschlagenden Aufgaben noch näher bezeichnen.

4. Das Seitwärtsabschneiden — so nenne ich das Verfahren, wenn man eine Standlinie bestimmt und verhältnißmäßig aufgetragen hat, anderer Umstände wegen sich aber nicht auf beiden Endpunkten, vielleicht auf keinem derselben mit dem Meßtisch aufstellen kann; aber einen Standort wählt, welcher mit einem dieser Endpunkte in einem bestimmten Alignement, oder in der Verlängerung der Standlinie, auch wohl in der Standlinie selbst liegt, hierdurch aber entweder gleich oder in Verfolg der Arbeit, wie die betreffenden Aufgaben es näher aus einander setzen werden, den Meßtisch orientiren und den

*) Schlendrian, oder eigentlicher Schlendergang, soll, so spricht die Sage, der Gang auf den Saumerstiegen der Hochländer heißen, wo der Nachfolgende seinen Fuß immer in die Fußtapfen des Vorhergehenden setzt.

Standort selbst bestimmen kann. Auch hier werden keine anderen Messungen verlangt als die der Standlinie, und die Genauigkeit der Resultate, welche man bei richtigem Verfahren erlangt, macht auch diese Art der Bestimmung sehr empfehlenswerth.

5. Das Rückwärtseinschneiden. Hierunter verstehe ich jenes Verfahren, wodurch jeder beliebig gewählte Standpunkt, über welchen der Meßtisch aufgestellt ist, jedesmal bestimmt werden kann, wenn bereits die Lage dreier Gegenstände, welche man aus diesem Punkte übersehen kann, auf dem Meßtisch angegeben ist. Die mannigfachen Lagen, welche ein so gewählter Punkt gegen die genannten drei Objekte haben kann, führen verschiedene Auflösungsarten herbei, die einer näheren Auseinandersetzung bedürfen; dies und die große Allgemeinheit dieses Verfahrens, welche dadurch, daß sie den Geometer in Stand setzt, jeden Punkt, dessen Vorzüglichkeit zum Bestimmen anderer Objekte er übersehen, oder den er selbst aus keinem andern Standorte niederlegen konnte, auf dem Meßtische zu bestimmen, veranlassen mich, demselben eine eigene Abhandlung zu weihen, die nach den Aufgaben, welche in die früher genannten vier Bestimmungsarten einschlagen, folgen soll.

Aufgabe 1.

Die Entfernung AB (Fig. 29) zweier Gegenstände A und B, welche nicht durch unmittelbare Messung erhalten werden kann, weil etwa Terrainhindernisse vorhanden sind, soll aus irgend einem dritten Punkte C mit dem Meßtisch bestimmt werden.

Auflösung.

Man stellt den Meßtisch über den Punkt C, welcher so gewählt worden, daß man sowohl A als B frei sehen und die Entfernungen CA, CB ungehindert messen kann, sticht in c, senkrecht über C, eine Anschlagnadel ein, legt hier das Diopter-Lineal, oder das Instrument, welches man zum Visiren gebrauchen will, an, richtet es nach A, ziehet die Visirlinie cd, hebt das Visirwerkzeug behutsam ab, stellt es in der ungefähren Richtung nach B auf, schiebt es an die Nadel und richtet es völlig auf B ein, worauf man nun die Visirlinie cf ziehet. Nunmehr nimmt man den Meßtisch über C hinweg und läßt die Entfernungen CA, CB mit der Kette messen, trägt diese erhaltenen Weiten nach dem in Gebrauch habenden verjüngten Maaßstabe auf die betreffenden Visirlinien nach ca und cb auf, ziehet die Linie ab und nimmt die Größe derselben vom verjüngten Maaßstabe ab, welche alsdann genau der gesuchten Entfernung AB entsprechen wird.

Beweis.

Dem Verfahren gemäß ist $\angle ACB = \angle acb$.

$AC : ac = BC : bc$, mithin

$\triangle ABC \sim \triangle abc$, und dann auch

$ab : AB = ac : AC = bc : BC$.

Wenn demnach das Verhältniß des Maaßstabes zum wirklichen Maaße $= 1 : n$, so ist auch $ab : AB = 1 : n$ und die durch den Maaßstab angegebene Größe von ab auch die der Weite AB.

Aufgabe 2.

Ein Grundstück, welches so gelegen ist, daß man keine freie Aussicht nach bereits bestimmten Punkten hat, oder welches überhaupt als einziger Gegenstand einer kleinen Aufnahme nicht durch Hülfe anderer Punkte bestimmt werden kann, soll aufgenommen werden.

Auflösung.

Man wähle im Inneren der durch die Grenzen des aufzunehmenden Grundstücks gebildeten Figur einen Punkt C (Fig. 30), von welchem aus man alle, oder doch so viel Winkelpunkte derselben übersehen kann, als irgend möglich ist, stelle hier den Meßtisch auf, steche in den senkrecht über C liegenden Punkt c die Anschlagnadel, und ziehe nach einander, nach den Winkelpunkten A, B, D, F, G... visirend, die Visirlinien ch, ck, cl, cm, cn, nehme nunmehr den Meßtisch weg und lasse die Entfernungen CA, CB, CD, ... mit der Kette messen; trage die für diese Längen auf dem zum Grunde liegenden Maaßstab gefundenen Maaße auf die betreffenden Schenkel nach ca, cb, cd, cf, cg, wodurch die Weiten AB, BD, ... kurz die Umfangslinien der Figur, wie bei der Aufgabe 1 bestimmt werden, wenn man die Punkte a, b, d ... durch gerade Linien verbindet, und wodurch auch die Lage der Punkte A, B, D, ... gegen einander und gegen den Punkt C verhältnißmäßig ausgedrückt, d. h. wodurch die Figur in Grund gelegt wird.

Wäre das Grundstück selbst unzugänglich und so der Punkt C nicht innerhalb desselben zu wählen, so nehme

man einen Standort C′ außerhalb der Figur an, von wo aus man, wie vorhin, die Figur übersehen kann, und verfahre alsdann ganz wie auf die angegebene Weise, d. h. visire nach den Winkelpunkten, ziehe die Visirlinien, messe die Entfernungen jener Winkelpunkte vom Standorte und trage diese Maaße nach der gehörigen Verjüngung auf die betreffenden Visirlinien u. s. w.

Um sich die Messung der Entfernungen zu ersparen, hat man in neueren Zeiten in Vorschlag gebracht, sich eines Diopter-Fernrohrs zu bedienen, dessen Fadenkreuz so eingerichtet ist, daß zwei horizontale Fäden in einer constanten Entfernung angebracht sind, so daß diese von einer in den Punkten, dessen Entfernung vom Standort man kennen will, aufgestellten, und nach einer weiter unten folgenden Methode eingetheilten Latte eine Zahl abschneiden, welche eben diese Entfernung im bestimmten Maaße ausdrückt.

Die eben besprochene Latte ist 8 bis 10 Fuß hoch, 4 Zoll breit und 1 Zoll dick und in der Mitte der Höhe mit einem gewöhnlichen Diopter-Lineal so verbunden, daß die Visir-Ebene des letzteren senkrecht auf die vordere Fläche der Latte stehet, so also, daß wenn man mit letzterem auf irgend einen Gegenstand visirt, die Latte senkrecht zur Visirlinie stehet. Sie wird mit einer weißen Oelfarbe überstrichen und 2 Fuß von ihrem unteren Ende ein starker schwarzer Querstrich angebracht, dann aber die fernere Eintheilung auf folgende Art vorgenommen. Es wird eine bestimmte Weite von 50—60 Ruthen genau abgemessen und auf einem Endpunkte derselben das nach obiger Art eingerichtete Fernrohr auf dem Meßtisch auf-

gestellt, die Latte aber in bestimmter bekannter Weite von 10, 15, 20 u. s. w. kurz von 5 zu 5 Ruthen aufgestellt und mittelst des Diopters so eingerichtet, daß dieses das Fernrohr schneidet, die Latte also senkrecht zur Visir-Ebene stehet; das Fernrohr richtet man, da das Bild der Latte wegen der Einrichtung des Rohrs mit zwei Gläsern verkehrt erscheint, mit dem oberen Horizontal-Ende auf den bemerkten Querstrich und an der Latte wird ein schwarz angestrichenes Papier langsam hinaufgeschoben, bis der Geometer das Zeichen giebt, inne zu halten, welches alsdann geschieht, wenn der Rand des Papiers in eine Ebene mit dem untern Horizontalfaden tritt, d. h. durch letzteren gedeckt wird; hier wird auf der Latte ein neuer Strich mit schwarzer Oelfarbe angebracht und mit großen durch das Fernrohr kennbaren Ziffern die Zahl, welche die Weite des Rohrs von der Latte in Ruthen angiebt, angeschrieben. Wie gesagt, wird diese Operation in Längen von 5 zu 5 Ruthen wiederholt und somit die Latte zum ferneren Gebrauch eingerichtet.

Wird dieselbe nun in einem Punkte A aufgestellt und das Fernrohr in C eingerichtet, so schneidet es einen dieser Querstriche durch seinen unteren Horizontalfaden ab, wenn der obere wieder auf den dickeren Anfangsstrich gerichtet wurde; die bei jenem Strich bemerkte Zahl giebt alsdann die Entfernung des A von C in Ruthenmaaß an. Wenn der Faden des Rohrs aber zwischen zwei Theilstrichen fällt, so wird man bei einiger Uebung durch Schätzung des abgeschnittenen Theils die Entfernung des A auch in Fußen angeben, und so die unmittelbare Messung von dergleichen Weiten ersparen können.

Aufgabe 3.

Ein Grundstück, welches über seine Fläche keine freie Aussicht gestattet, etwa ein Wald u. s. w. soll aufgenommen werden.

Auflösung.

Auf der Grenze der aufzunehmenden Figur (Fig. 31) wähle man nach Bequemlichkeit einen Winkelpunkt als den ersten Standort, über denselben stelle man den Meßtisch auf, markire den Punkt a auf selbigem, welcher senkrecht über dem Mittelpunkt A der Figur liegt, stecke hier die Anschlagnadel ein und visire nach dem nächsten Winkelpunkt B, ziehe die Visirlinie ab′; man nehme nun den Meßtisch fort, messe die Entfernung AB, trage sie nach dem Maaßstabe in ab auf, stelle den Meßtisch nunmehr über B, so daß gleich anfänglich die Linie ab in die ungefähre Lage der AB kömmt, bringe nun den Punkt b mittelst der Einlothzange genau senkrecht über B und vollende die Einrichtung der ab in die Vertikal-Ebene durch AB; messe alsdann nach C und ziehe die Visirlinie bc′, messe BC, trage bc auf, stelle über C den Meßtisch u. s. w., kurz, verfahre nun auf allen Winkelpunkten wie bisher bis zum letzten Standorte F. Zieht man hier die Visirlinie nach A, so muß nothwendig fa′ durch a gehen und fa der FA genau entsprechen, wenn die Arbeit mit der gehörigen Genauigkeit geführt worden ist.

Diese Auflösungsart wird wegen der vielen Fehler, welche dabei vorfallen können, immer unsicher und daher nur in Fällen anzuwenden sein, wo man durchaus keine:

andern Weg, um zum Ziele zu gelangen, einschlagen kann, wie dies z. B., wenn Theile eines Waldes, im Innern desselben gehende Wege u. s. w. aufgenommen werden sollen, der Fall ist; hier ist denn unumgänglich nöthig, mit der möglichsten Genauigkeit zu arbeiten und besonders darauf zu achten, daß die Umfangslinien sehr genau gemessen, der hiedurch bestimmte Punkt über dem folgenden Standort völlig senkrecht eingelothet, die auf den Mittelpunkten eingesteckten Meßfahnen vollkommen senkrecht gestellt und beim Visiren genau deren Mitte durch das Haar des Objectiv-Diopters gedeckt werde, das Lineal selbst aber hart an die Anschlagnadel anliege und der Meßtisch vor jeder Verrückung bewahrt werde.

Wird auf alle diese Umstände nicht mit der größten Sorgfalt geachtet, so sind Fehler unvermeidlich, und diese können darin bestehen, daß die im vorherigen Beispiel o a′ genannte letzte Visirlinie entweder die a b selbst oder deren Verlängerung über a hinaus schneidet; im ersteren Falle sind die Anfangslinien zu groß angenommen, oder durch die andern Vernachlässigungen die Winkel der Figur zu klein genommen worden; im zweiten Falle sind umgekehrt die Winkel zu groß oder die Umfangslinien zu klein verzeichnet.

Ist das aufzunehmende Grundstück aber von der Art, daß es von einer freien Ebene umschlossen ist, so wird man diese Verfahrungsart nicht einschlagen, um jene Fehler, welche nur selten ausbleiben, zu vermeiden, und auf andere Arten, wie nachfolgend angegeben wird, die Aufnahme zu bewirken suchen.

Aufgabe 4.

Es soll die Entfernung zweier Gegenstände A und B, welche man frei sehen kann (Fig. 32) aus der Ferne bestimmt werden.

Auflösung.

Man wähle eine Standlinie, der man eine solche Länge und solche Lage giebt, daß die Winkel, deren Scheitel in A und B, und deren Schenkel durch die Endpunkte der Standlinie gehen würden, nicht unter 30 Grad betragen, und die wo möglich so liegt, wie oben angegeben wurde, daß Lehmann die Wahl der Standlinie bestimme. Ueber einen Endpunkt C derselben stelle man den Meßtisch auf, welchen man, falls die Standlinie schon vorher gemessen worden, gehörig in das Alignement einrichtet, steche in c, welcher senkrecht über C, die Nadel und visire nach A und B, wodurch die Visirlinien ca′, cb′ erhalten werden; hierauf begebe man sich nach dem Endpunkte D, richte die Linie dc ebenfalls in die Vertikale durch DC ein, bringe d senkrecht über D und ziehe beim Visiren nach A und B die Linie da″, db″, wo diese neuen Visirlinien jene ersten nach denselben Objecten gezogenen in a und b durchschneiden, und so durch diese Operation der betreffende Punkt in Grund gelegt wird, d. h. die Punkte a und b liegen gegen einander und gegen die Standlinie cd verhältnißmäßig so, wie A, B, C, D auf dem Boden.

Beweis.

Der Construction nach ist:

$\angle acd = \angle ACD$; $\angle adc = \angle ADC$, mithin

$\triangle acd \sim \triangle ACD$ und daher $AC : ac = CD : cd$.

Auf gleiche Weise ist:

$\triangle bcd \sim \triangle BCD$ und $\underline{BC : bc = CD : cd,}$

mithin auch $AC : ac = BC : bc.$

Nach der Construction ist aber auch $\underline{\angle ACB = \angle acb,}$

mithin $\triangle ACB \sim \triangle acb,$

und dann auch $AB : ab = AC : ac = CD : cd,$

mithin sind alle Entfernungen der auf dem Meßtisch erhaltenen Punkte von einander denen auf dem wirklichen Boden vorhandenen proportional, und zwar stehen sie in dem für den Maaßstab angenommenen Verjüngungs-Verhältniß zu jenen.

Da aber auch hier Fehler, sowohl beim Visiren als beim Messen der Standlinie, vorgefallen sein können, so wird man jene Punkte noch nicht mit völliger Gewißheit als die richtigen annehmen können; erst wenn man aus einem dritten, etwa in der Mitte der Standlinie angenommenen Punkte F, über welchen man den Meßtisch aufstellt, einrichtet und den verhältnißmäßig bestimmten Punkt f senkrecht über F bringt, neue Visirlinien nach A und B gezogen und gefunden, daß dieselbe wie fa''' den Punkt a genau durchschneiden, wird man auf die richtige Bestimmung desselben bauen können; falls aber eine solche Visirlinie wie fb''' jenen Punkt nicht trifft, mithin die Visirlinie aus C und D nach B in irgend welchen Punkten durchschneidet, ist die Bestimmung des wahren Punktes b unter den drei entstandenen Durchschnittspunkten zweifelhaft und kann nur aus einem andern Standpunkte durch eine vierte dahin gezogene Visirlinie, welche alsdann den wahren Punkt b durchschneiden wird, ermittelt werden.

Die Weite ab wird aber bei Annahme des richtigen, fehlerlosen Verfahrens mit der Entfernung AB in demselben Verhältniß stehen, als für den Maaßstab angenommen worden; wonach man also die gesuchte Größe abnehmen kann.

Aufgabe 5.

Ein frei zu übersehendes Grundstück, dessen Winkelpunkte durch kennbare Gegenstände, als Steinhaufen, Pfähle, einzelne Bäume u. s. w. bezeichnet sind, z. B. eine Wiese, ein Wald, eine Ackerflur u. s. w. soll aufgenommen werden.

Auflösung.

Man wähle, wie die Oertlichkeit es gestattet, im Umfange des aufzunehmenden Stücks oder an einer Seite desselben (Fig. 33) eine Standlinie, da, wo die meisten Winkelpunkte, welche in Grund gelegt werden sollen, von beiden Endpunkten zu übersehen sind, welches mithin immer da sein wird, wo die höheren Stellen sind und von wo der Boden zu einer oder beiden Seiten abfällt. Man messe dieselbe nach den gegebenen Regeln und trage sie verhältnißmäßig auf das Meßtischblatt auf. Sei CD diese Standlinie in der Wirklichkeit, cd das Bild derselben auf dem Meßtische, so stelle man sich in C auf, visire mit dem bereits oft angegebenen Verfahren nach allen bemerkenswerthen Punkten, den Grenzpfählen, Steinhaufen, Hecken, Zäunen, hervorspringenden Winkeln der letztern u. s. w., welche nöthigenfalls durch Meßfahnen kenntlich zu machen sind, und ziehe sonach die Visirlinien aus c; hierauf begiebt man sich nach dem Endpunkt D,

bringt d senkrecht über D und richtet dc genau in die Vertikal-Ebene durch CD ein, welches immer am bequemsten und genauesten dann geschehen wird, wenn die Standlinie in einem Alignement zwischen zwei kennbaren Objecten oder in deren Verlängerung gewählt wurde. Nunmehr bestimmt man wieder nach der angegebenen Art die Visirlinien aus d und markirt die Durchschnittspunkte der aus den beiden Endpunkten nach einerlei Objekt gezogenen Linien durch einen feinen Einstich mit einer Nadel und einen kleinen Kreis, welchen man mit dem Bleistift darum ziehet. Hiedurch sind nun, wie leicht zu beweisen ist, die Objecte, welche man wählte, in Grund gelegt, so wie es in der 4ten Aufgabe die Objekte A und B wurden, und man wird nun die nöthigen Verbindungen zwischen diesen Punkten hineinbringen können.

Aufgabe 6.

Bei einer ökonomischen Aufnahme soll das Ufer eines Flusses bestimmt werden.

Auflösung.

Aus den Endpunkten C und D einer nach den obigen Regeln gewählten Standlinie, von welcher aus man einen bedeutenden Theil, wo nicht das ganze die vorliegende Aufnahme betreffende Stück des Flusses übersehen kann, ziehe man Visirlinien nach allen am Ufer befindlichen sich auszeichnenden Gegenständen, als Bäume, Gebüsche, Steine, und wo dergleichen fehlen, lasse man in den bedeutendsten Krümmungen Meßfahnen einstecken; hierdurch bestimmt man, wie schon erwiesen, diese Punkte in ihrer

verhältnißmäßigen Lage auf dem Meßtische. Hat man nicht das Ganze übersehen können, so wähle man eine zweite Standlinie nach denselben Regeln und lege so die noch fehlenden Punkte in Grund. Nachdem solchergestalt alle diese bedeutenden kennbaren Punkte bestimmt worden, nimmt man an Ort und Stelle nach dem Augenmaaß die Abweichungen des Ufers von den zwischen je zwei zunächst liegenden Punkten gedachter gerader Linie wahr, und zeichnet sie, mit dem abgenommenen Blatte längs dem Ufer gehend, ein.

Aufgabe 7.

Ein Punkt A soll, so wie ein anderer B, mittelst des Meßtisches in Grund gelegt werden (Fig. 34), man hat auf dem Meßtische die Standlinie CD bereits in cd aufgetragen, kann aber irgend eines Umstandes wegen nur den Endpunkt C derselben zur Aufstellung des Meßtisches gebrauchen.

Auflösung.

Man stelle den Meßtisch über C auf, richte cd in die Vertikal-Ebene durch CD, und ziehe die Visirlinie ca′, so wie, falls man von C aus nach B sehen kann, die Visirlinie cb′, gehe nunmehr nach A und stelle den Meßtisch so auf, daß die Punkte c und d in die ungefähre Lage der C und D kommen, und daß die Visirlinie ca′ genau in die durch CA gelegte Vertikal-Ebene fällt; dies wird man leicht bewirken, wenn die Linie durch CA in dem Alignement zweier ausgezeichneten Punkte liegt. Wird das Diopter-Lineal an die ca′ gelegt und nun der

Meßtisch so lange horizontal gedreht, bis der Faden des Objectiv-Diopters genau die Mitte des Gegenstandes C deckt, so ist das Verlangte geschehen. Sticht man nun in d eine Nadel und visirt nach D, verlängert die gezogene Linie rückwärts, bis sie die ca′ durchschneidet und bemerkt diesen Durchschnittspunkt a, so ist derselbe der dem Standort A verhältnißmäßig auf dem Meßtisch liegende Punkt.

Es ist nämlich durch das Einrichten bewirkt, daß a′c C eine gerade Linie bilden; da nun $\angle ACD = \angle a'cd$, so ist auch hierdurch cd der CD parallel gebracht, durch die neuen Visirlinien sind aber eben der Parallelen wegen $\angle CDA = \angle cda'$ gemacht, somit aber $\triangle ACD \sim \triangle acd$ und a der senkrecht über A stehende Punkt und auch wegen der proportionalen Seiten zu den Punkten d und c in dem verhältnißmäßigen Abstande wie A zu C und D.

Hätte das Terrain erlaubt, von C aus nach B eine Visirlinie cb′ zu legen, so wird man nur in d die Nadel zu stechen und nach B zu visiren brauchen, um den Durchschnittspunkt b das Bild des B zu erhalten, wie dies schon aus den vorherigen Aufgaben folgt. Könnte man indeß nicht von C nach B sehen, so wird man nun die Visirlinie ab″ auf B legen und nach B gehen, dort aber dieselbe Operation wie in A wiederholen müssen, d. h. die b″a auf A einrichten, hierdurch die ac ≑ AC und die cd ≑ CD bringen und in d eine Nadel einstechend, durch eine nach D gezogene Visirlinie den Punkt b, wie dort den Punkt a, abschneiden.

Aufgabe 8.

Die Mauer einer Stadt, oder überhaupt die Umfangslinien eines Grundstückes, welches über seine Fläche keine freie Aussicht gestattet, soll in Grund gelegt werden.

Auflösung.

Im Innern der Stadt wähle man sich einen Thurm A (Fig. 35) aus (einen Baum, wenn das Aufzunehmende ein Wald u. s. w., kurz einen überall kenntlichen Gegenstand) und bestimme durch unmittelbare Messung die Länge einer Standlinie CD, welche man so nahe als möglich den aufzunehmenden Umfangslinien wählt; suche alsdann die künftigen schicklichen Standorte B, F, H, K und lasse sie durch Meßfahnen kenntlich machen. Nunmehr nehme man in den Endpunkten C und D der Standlinie, welche auf dem Meßtisch in c und d aufgetragen worden, die Visirlinien ca′, ck′ und da″, db′. Durch die da″ und ca′ wird der Durchschnittspunkt a, d. h. das Bild des Gegenstandes A, bestimmt (Aufgabe 4) und man kann nunmehr mit dem Meßtisch nach B gehen, daselbst die Linie b′d in die Richtung BD bringen und, in a die Nadel stechend und nach A visirend, rückwärts den Punkt b im Durchschnitt der neuen Visirlinie mit der db′ bestimmen (Aufgabe 7). Aus b legt man nun die neue Visirlinie bf′ nach F, gehet nach F u. s. w. und bestimmt auf solche Weise die Punkte b, f, h, k, welcher letztere Punkt schon durch die aus H nach K gelegte Visirlinie hk″ in den Durchschnitt derselben mit der zuerst gelegten ck′ bestimmt werden muß. Durch das Verfahrenin K, wie in allen übrigen Punkten,

wird man indeß noch eine Prüfung der Arbeit erhalten, indem die neue Visirlinie nach aA dort diesen Durchschnittspunkt genau treffen muß, falls richtig gearbeitet worden ist.

Diese in Grund gelegten Punkte geben aber nunmehr genug Data, um durch die Aufgabe 4 die ausgezeichneten Punkte der wirklich aufzunehmenden Umfangslinien, welche zu zweien denselben gegenüber liegen, bestimmen und sonach diese selbst ausführen zu können.

Aufgabe 9.

Es sollen mehrere Objekte, wie F, G..., (Fig. 36) in Grund gelegt werden; die bereits gemessene Standlinie CD ist aber zwischen solchen Endpunkten gelegen, welche keine Aufstellung des Meßtisches in diesen Punkten erlauben; fernere unmittelbare Messungen sollen aber nicht vorgenommen werden.

Auflösung.

Man wähle einen Punkt A in der Verlängerung der durch DC gedachten Linie, welcher zugleich in dem Alignement zweier andern Punkte X, Y liegt, so daß also A der Durchschnittspunkt der verlängerten CD und der XY ist. Hier stelle man den Meßtisch auf und richte die auf demselben gelegte cd genau in die Richtung CD ein, bestimme nun in der Verlängerung derselben nach ungefährer Schätzung einen Punkt z, welcher als das Bild von A vorläufig angenommen wird; hier sticht man die Anschlagnadel ein und legt Visirlinien zf′, zg′ nach den zu bestimmenden Punkten F, G... Man richte aber auch das Diopter-Lineal genau in das Alignement XY

ein, indem man vor- auch rückwärts visirt, wenn anders die Einrichtung des in Gebrauch habenden Werkzeuges es gestattet, und ziehe durch z die Linie xy. Nunmehr nehme man den Meßtisch ab und gehe in dem Alignement XY bis auf einen Punkt B vor, von wo man die zu bestimmenden Objecte übersehen kann, und der auch weit genug von A entfernt ist, um keine zu spitzen Durchschnitte der Visirlinien zu geben. Hier stelle man den Meßtisch auf und richte die Linie xy genau in die Vertikal-Ebene durch XY ein. Alsdann sticht man die Anschlagnadel in c, visirt nach C und ziehet die Linie cb′ rückwärts, bestimmt auf gleiche Weise nach genauem Visiren auf D die Linie db″, und erhält so durch den Durchschnittspunkt beider das Bild b des gegenwärtigen Standorts völlig genau. Denn, wenn auch der Punkt z falsch angenommen wurde, so war doch in A der Meßtisch auf CD gehörig eingerichtet und die Linie xy, mithin der Winkel czy richtig bestimmt. Da nun aber der Meßtisch in B so eingerichtet ward, daß yxX′ eine gerade Linie bilden, so muß auch eben der gleiche Winkel CAY=czy die Linie cd der CD völlig parallel legen; alsdann aber sind die Dreiecke CDB, cdb ähnlich, und somit muß b der senkrecht über B liegende, verhältnißmäßig gegen cd richtig bestimmte Punkt sein. Nunmehr wird in b eine Anschlagnadel gestochen und nach X′ visirt; der Durchschnitt dieser neuen Visirlinie ba′ mit der Verlängerung der cd wird dann den wahren Punkt a bestimmen. Denn, da A in dem Durchschnitt der gleichnamigen Linien auf dem Felde gewählt wurde, nunmehr aber der eigentliche Punkt B in diesem Alignement ge-

funden worden; so werden auch die genannten Visirlinien genau die Bilder der Alignements, und der Durchschnitt a die Projection von A sein. Die aus dem angenommenen Punkte z gezogenen Visirlinien zf′, zg′, welche zwar den wahren Winkel mit der cd einschließen, aber doch nicht aus dem wahren Bilde von A gezogen wurden, werden demnächst nach a dadurch übertragen werden müssen, daß man aus a mit ihnen die Parallelen af″, ag″ ziehet und die früheren auslöscht oder ihre Ungültigkeit bezeichnet.

Das Ziehen der Parallelen kann hier auf folgende Art geschehen. Man steche die Anschlagnadel in z und lege das Diopter-Lineal an die fehlerhafte Visirlinie zf′, bemerke nun einen entfernten Punkt am Horizont, welcher durch den Faden des Objectiv-Diopters gedeckt wird, steche alsdann die Nadel in a, visire nach dem wirklichen Objecte und ziehe die Linie af″, welche von der parallelen Lage mit zf′ durchaus nicht merkbar abweichen wird. Auf gleiche Weise wird alsdann mit allen andern zu ziehenden Parallelen verfahren; daß aber der Fehler in der Parallelität solcher Linien durchaus nicht merkbar sein kann, erhellt auf folgende Art. Es betrage die Entfernung der Punkte z und a auf dem Meßtische (Fig. 37) 6″, die Weite des am Horizont bemerkten Richtpunkts e von dem Punkte z eine Stunde Weges = 10000′ = 100000″; man ziehe auf dem Meßtisch die Visirlinie ze und mache zb = 12″, ziehe bd ∦ za; alsdann ist: $\triangle zae \sim \triangle bde$ und za : ze = bd : be, und demnach

$$bd = \frac{be \cdot za}{ze} = \frac{6(100000 - 12)''}{100000} = \frac{6 \cdot 99988}{100000} = 5{,}99928''.$$

Es ist demnach der Unterschied zwischen za und bd, welche bei völliger Parallelität den zb und ad gleich sein müßten, hier: za — bd = 6 — 5,99928 = 0,00072″ = 0,0072‴, mithin beträgt dieser Unterschied ungefähr $\frac{1}{139}$‴, eine Größe, welche schon durch die Stärke des feinen Bleifederstrichs ausgefüllt wird, um welche man also bei jeder Linie fehlen kann, weshalb also einzusehen ist, daß das obige Verfahren für die Ausübung genau genug ist, und wobei noch zu bedenken ist, daß, da die Größen za und zb größer, die Entfernung ze hingegen kleiner angenommen worden, als dies in den vorkommenden Fällen gefunden wird, dieserhalb der daran zu findende Unterschied kaum die Hälfte des hier berechneten betragen wird.

Aus b wird nun gleichfalls nach den zu bestimmenden Punkten F, G ... visirt, und die Durchschnittspunkte mit den aus a gezogenen Visirlinien werden nunmehr die Punkte F, G ... durch die verhältnißmäßig liegenden f, g angeben.

Aufgabe 10.

Alles sei wie in der Aufgabe 9, mit der Ausnahme, daß man verhindert wird, sich in der Verlängerung der Standlinie CD aufzustellen und daher den ersten Standort zwischen den Endpunkten derselben wählen muß.

Auflösung.

Man wähle zwei Objecte, X und Y (Fig. 38), welche so gelegen sind, daß die zwischen ihnen gedachte Linie die DC in irgend einem Punkte durchschneidet; in diesem Alignement gehe man zur Standlinie vor und richte sich

daselbst so ein, daß die cd genau in der Richtung CD liegt. Man wird dies nach der bei dem Abstecken der Standlinien gegebenen Regel bewirken können, oder auch den Meßtisch in einem Punkte, welchen man schon in der AB liegend glaubt, aufstellen, das Diopter-Lineal an cd legen und den Meßtisch horizontal drehen, bis der Faden des Objectiv-Diopters die Mitte des Gegenstandes C abschneidet, alsdann aber rückwärts nach D visiren, und wenn man D nicht auch schon durch den Faden gedeckt findet, das Lineal um die in A gesteckte Nadel drehen. Hierdurch wird ein Winkel entstehen, dessen Oeffnung gegen die Standlinie zugekehrt ist, in welcher Richtung man also vorgehen und das Verfahren wiederholen muß, bis man das Lineal, welches an cd anliegt, auch genau auf C und D gerichtet findet. — Wie bei der vorherigen Aufgabe wählt man nun einen Punkt z, welcher nach dem Augenmaaße die Projection des jetzigen Standorts A sein soll, und legt Visirlinien zf′, zg′ nach den zu bestimmenden Gegenständen F, G ... und ziehet auch die xy, welche das künftige Alignement angeben soll, zwischen X und Y. In dieser Richtung begiebt man sich von A hinweg und in die Richtung nach Y, von wo man einen neuen Standort B erhält, den Meßtisch nach der Linie xy einrichtet, und ganz wie in der vorherigen Aufgabe den Punkt b durch rückwärts gezogene Visirlinien von c nach C und von d nach D bestimmt, den wahren Punkt a bestimmt, die dort gelegten Visirlinien durch Parallelen berichtigt und aus b neue Visirlinien nach F, G ... legt, welche nun die Punkte f, g .. bestimmen.

Wäre der erste Standort A so gelegen, daß man

die Objecte F, G von dort aus nicht hätte sehen können, so würde man noch einen dritten Standort H wählen müssen; dieserhalb aber in B ein Alignement VW gesucht, die Linie vw gezogen und dieselbe im Standort H in dies Alignement eingerichtet haben; dann aber den Punkt h wie in der Aufgabe 8 dadurch bestimmen, daß man in c eine Nadel sticht, nach C visirt und die Linie ch rückwärts verlängert, bis sie die vw in h schneidet, aus diesem Punkte aber dann die Visirlinie zu Bestimmung der Punkte f, g... legen.

Aufgabe 11.

Es sollen mehrere Punkte F, G... (Fig. 39) in Grund gelegt werden, es ist aber nicht möglich, sich in der bereits gemessenen und aufgetragenen Standlinie CD aufzustellen, da weder die Beschaffenheit der Endpunkte dies erlaubt, noch die Verlängerung der Linie oder diese selbst es gestattet.

Auflösung.

Da man die Standlinie den Bedingungen der Aufgabe gemäß nur in so fern benutzen kann, als ihre bereits in Grund gelegten Endpunkte aus anderen Standorten sichtbar sind, so wähle man einen Standort A in irgend einem Alignement XY, stelle hier die cd dem Augenmaaße nach der CD parallel und bestimme, obwohl jenes Parallelstellen nicht als genau zu betrachten ist, dennoch durch das oft angegebene Verfahren, indem man die Visirlinien cC und dD rückwärts ziehet, den jetzigen Standort A in a. Hier wird das Diopter-Lineal angelegt, auf X gerichtet und die Linie xy gezogen, alsdann

aber in dieser Richtung vorgegangen, bis man einen zweiten Standort, wo man die zu bestimmenden Punkte gehörig übersehen kann, in B wählt. Der Meßtisch wird nun mit Hülfe der xy genau in das Alignement XY eingerichtet, in c eine Nadel gestochen und die Visirlinie cC rückwärts bis zum Durchschnitt b′ mit der xy gezogen, welcher Punkt b′ als der jetzige Standpunkt zu betrachten ist. Sticht man hier in b′ die Anschlagnadel und visirt nach D, so wird diese Linie die aus A nach D gezogene Visirlinie a′d in irgend einem Punkte m schneiden. Durch das bisherige Verfahren wurden in der Linie XY die Punkte a′, b′ gar nicht in ihrer richtigen Lage gegen cd, wohl aber in ihrer verhältnißmäßigen Lage zu einander, wie A und B, bestimmt, die Entfernung a′b′ ist demnach hier, was in Aufgabe 4 die Standlinie war, und somit sind die Punkte C und D durch die aus beiden Endpunkten gelegten Visirlinien in c und m in Grund gelegt; eine Linie cm muß demnach, wie in der angeführten Aufgabe bereits erwiesen ist, der CD wirklich parallel liegen, und dies giebt uns das Mittel, die Lage des Meßtisches zu berichtigen und sonach auch den Punkten b′ und a′ eine auch gegen c und d verhältnißmäßige Lage anzuweisen. Um den Meßtisch in die erforderliche Lage zu bringen, lege man an cm das Diopter-Lineal und bemerke das Objekt R am Horizont, welches durch den Faden des Diopters gedeckt wird, lege nunmehr das Lineal an cd und drehe den Meßtisch horizontal herum, bis die Vertikal-Ebene durch das Diopter-Lineal genau durch das bemerkte Object R gehet; alsdann hat cd genau die Lage, welche früher cm hatte, d. h. sie ist nunmehr der

CD wirklich parallel gestellt. Nunmehr ist es leicht, durch rückwärts gezogene Visirlinien cC und dD den wahren Standort b zu ermitteln und neue Visirlinien nach den zu bestimmenden Gegenständen zu legen, so wie neue Alignements zu ermitteln, und überhaupt nach den früheren Aufgaben fernere Standorte mit Hülfe der Alignements zu ermitteln, bis man dem vorliegenden Zwecke genügt hat.

Aufgabe 12.

Eine zwischen zwei Objecte gedachte und ihrer Größe nach bereits bekannte Linie soll auf dem Meßtisch so aufgetragen werden, daß, wenn der Meßtisch auf einem der beiden Endpunkte gehörig eingerichtet ist, die Randlinien desselben genau die Richtungen nach den bekannten vier Himmelsgegenden annehmen, d. h. daß der Meßtisch gehörig gegen die Mittagslinie durch einen der Endpunkte orientirt sei.

Auflösung.

Ist man mit einer Orientir-Boussole versehen, wie die (Seite 23) beschriebenen, so stellt man den Meßtisch über den bestimmten Endpunkt auf, schraubt die Boussole an, so daß die darauf verzeichnete wahre Mittagslinie mit zweien der Randlinien parallel läuft, und drehet ihn so lange mit der Schraube ohne Ende horizontal herum, bis die Nadel genau auf die bezeichnete magnetische Mittagslinie einspielt; alsdann haben die Randlinien die verlangte Stellung, und man kann nunmehr den senkrecht über dem Standort befindlichen Punkt finden, dort eine

Nadel einstechen, nach dem andern Endpunkt visiren und auf die erhaltene Linie das bekannte Maaß nach dem verjüngten Maaßstabe auftragen, wodurch das Verlangte erfüllt worden.

Ist der Ring der Boussole aber in Grade eingetheilt und die magnetische Mittagslinie des Ortes, d. h. ihre Abweichung von der wahren darauf nicht angemerkt, so wird man sich die Kenntniß von dieser in Graden ausgedrückten Abweichung anderweitig verschaffen müssen. Sei dieselbe z. B. für irgend einen Ort, wo man arbeitet $= 15\frac{3}{4}^{\circ}$ von Norden nach Westen bekannt, und die Boussole so eingerichtet, daß der durch 360° und 180° der Eintheilung gehende Durchmesser der Randlinie des Meßtisches parallel läuft, so wird man den Meßtisch so lange drehen, bis die Mittellinie der Nadel genau auf $344\frac{1}{4}^{\circ}$ einspielt, weil alsdann die Randlinie die bestimmte Abweichung hat und also in der Richtung der wahren Mittagslinie liegt.

Beim Einspielen der Nadel muß man genau auf beide Enden derselben sehen, da man sonst Irrthümern ausgesetzt ist, welche aus der Stellung des Auges, welches nie genau über dem Mittelpunkt der Nadel gehalten werden kann, erzeugt werden. Wenn demnach die Boussole die letzt genannte Einrichtung hat, so wird im angeführten Beispiele das Nordende der Nadel über $344\frac{1}{4}^{\circ}$, das Südende aber genau über $180^{\circ} - 15\frac{3}{4}^{\circ} = 164\frac{1}{4}^{\circ}$ einspielen müssen, wenn man die gehörige Stellung des Meßtisches bewirkt hat.

Hat man indeß keine Orientir-Boussole im Gebrauch, so ist man genöthigt, die Mittagslinie des Ortes

selbst

selbst zu bestimmen; hiezu giebt uns die Natur ein Mittel an die Hand. Es ist nämlich eine aus der Astronomie entlehnte Wahrheit, daß die Himmelskörper in ihrer täglichen Bewegung den höchsten Punkt dann erreichen, wenn sie in die Mittagsebene treten, und gleiche Zeiten vor und nach diesem Eintritt — der Culmination, — auch einerlei Höhe haben. Ist dieser Satz, wie in der Astronomie geschieht, erwiesen, so ist auch klar, daß der Schatten, welchen die Sonne im Culminationspunkt wirft, am kürzesten ist, gleiche Zeiten, vorher und nachher aber einerlei Länge hat. Diesen Satz benutzt man im vorliegenden Falle auf folgende zum vorliegenden Zwecke hinlänglich genaue Art.

Durch die Diagonalen des Meßtisches wird der Drehpunkt C desselben ermittelt (Fig. 40). Hier wird ein Stift senkrecht aufgestellt, oder auch die senkrechte Kante einer Pyramide u. s. w., nachdem man den Meßtisch genau mit dem Punkt C über den Anfangspunkt der bekannten Linie gebracht, durch c eine Parallele AB mit zwei Randlinien des Meßtisches gezogen und mehrere concentrische Kreisbogen um C beschrieben hat. Man bemerkt nunmehr zu gleichen Zeiten vor und nach Mittag, wenn der Schatten des Stifts oder der Pyramide einen der concentrischen Ringe berührt. Sei dies um 9 Uhr Morgens und 3 Uhr Nachmittags in a und b, um 10 und 2 in c und d, um 11 und 1 in e und f. Man ziehet nunmehr die Sehnen ab, cd, ef und halbirt dieselben. Die Theilungspunkte müssen bei richtigem Verfahren genau in einer Linie mit dem Mittelpunkt C liegen, und eben diese Linie, welche man weiter ausziehet, ist die

wahre Mittagslinie; denn in diese Linie mußte der Schatten zur Zeit der Culmination fallen, weil sie gleich weit von den Punkten, wo er zu gleichen Zeiten vor und nach der Culmination war, liegt.

Nunmehr legt man das Diopter-Lineal an diese Linie gh, nachdem man die in C aufgestellten Körper weggenommen und bemerkt den Punkt am Horizont, welchen der Faden des Objectiv-Diopters abschneidet. dies sei ein Gegenstand X. Das Lineal wird nun an die Linie AB gelegt und der Meßtisch behutsam mit der Schraube ohne Ende so lange herumgedreht, bis die Vertikal-Ebene durch das Diopter-Lineal genau jenen Gegenstand X trifft; alsdann ist die Linie AB, mithin auch die beiden parallelen Randlinien des Meßtisches in die wahre Mittagslinie eingerichtet und nunmehr leicht, wie vorhin, die Lage der gemessenen Linie durch Anlegen des Werkzeuges an C und Visiren nach dem andern Endpunkt D zu finden und auf diese Linie die Länge jener nach dem verjüngten Maaßstabe aufzutragen.

Aufgabe 13.

Es sei zu einer unzugänglichen unbekannten Entfernung AB (Fig. 32), deren Endpunkte durch in der Ferne sichtbare Richtobjecte A und B bezeichnet sind, eine Parallele GH, durch den Punkt D gehend, abzustecken.

Auflösung.

Man verfahre eben so wie Seite 129 bei Auflösung der 4ten Aufgabe gelehrt worden, nur mit dem Unterschiede, daß man die Standlinie CD nicht mißt, sondern für deren Bild cd auf dem Meßtische eine beliebige

Länge annimmt, dann aber auf denselben, wenn a, b, c, d in Nr. 2. nach ihrer ähnlichen Lage bestimmt sind, aus d mit ab eine Parallele gd ziehet (nach Seite 138), an diese das Visirlineal anlegt, durch Gehülfen Meßfahnen ausstecken läßt und diese, durch das Visirlineal vor- und rückwärts visirend, in G und H einrichtet. Hieraus ergiebt sich leicht, wie eine durch D gehende Linie unter jeder beliebigen Richtung gegen AB auszustecken möglich ist.

Anmerkung. Tafel 1, Fig. 16 und Seite 81 in Meinerts Feldmeßkunst, Halle bei Renger, findet man ein Werkzeug angegeben, welches recht gut zur Auffindung der Mittagslinie dienen kann.

Sechster Abschnitt.

Vom Rückwärtseinschneiden.

Die Auflösung der Aufgabe: wie man die Lage eines Punktes gegen den andern, deren Lage man bereits kennt, ohne fernere unmittelbare Längenmessung bestimmen könne? hat schon seit langer Zeit die Geometer beschäftigt. Willebrand Snellius, ein holländischer Geometer, soll sie zuerst gefunden, und der Franzose Pothenot sie bekannt gemacht haben, weshalb sie auch mit dem Namen des Problems der vier Punkte oder des Pothenotschen Problems belegt worden ist. Aber noch eine Menge anderer Mathematiker haben sich damit beschäftigt, Auflösungen zu finden, für deren theoretischen Werth schon die Namen eines Lambert, Kästner, Meyer, Olbers, Langsdorf, Delambre ꝛc. bürgen, welche aber oft in der Anwendung ihre Schwierigkeiten finden, wo nicht gar von gar keinem praktischen Nutzen sind. Wir beschränken uns hier auf diejenigen Auflösungsarten, welche beim Gebrauch des Meßtisches hinlänglich genaue Resultate geben.

Die drei bereits bestimmten Punkte können in der Wirklichkeit entweder in einer geraden Linie liegen, oder sie bilden ein Dreieck; der letzte Fall wird natürlich am häufigsten eintreten, aber auch der erstere erfordert nähere

Betrachtung. Bilden sie ein Dreieck, so kann der gewählte Standpunkt einer dieser Punkte selbst sein, oder er kann in einer Seite des Dreiecks liegen, oder in der Verlängerung einer solchen Seitenlinie; diese genannten Fälle gehören indeß zu denen, wo die Bestimmung des Standortes durch eine der schon genannten Verfahrungsarten erfolgen kann. Der gewählte Punkt kann aber auch ferner in die Peripherie des um die drei Punkte zu legenden Kreises fallen, und in diesem Falle ist, wie weiter unten gezeigt werden wird, durchaus keine Auflösung der Aufgabe möglich. Die noch übrigen möglichen Lagen des Punktes, entweder innerhalb des Dreiecks oder außerhalb des Dreiecks, und innerhalb des umschriebenen Kreises oder außerhalb des Dreiecks und Kreises, einer Seite des ersteren gegenüber, oder endlich außerhalb des Dreiecks und Kreises zwischen den Verlängerungen zweier Seiten des ersteren, sind also eigentlich diejenigen, welche den Anfang dieser Aufgabe ausmachen; die verschiedenen Auflösungsarten derselben, welche hier angeführt werden sollen, sind aber folgende:

1) Durch Umtragung der Peripheriewinkel in einem Kreise.
2) Durch Verzeichnung zweier excentrischen Kreise, welche sich in dem zu bestimmenden Punkte schneiden.
3) Durch Annäherung.

Die ersteren beiden Auflösungsarten beruhen auf streng mathematischen Sätzen, welche bei der Angabe des eigentlichen Verfahrens geführt werden sollen; die letztere aber, welche, so wie jede Annäherungsmethode, in der rei-

nen Mathematik nicht die strengen Beweise gestattet, welche den bloßen Theoretiker einnehmen und den Unkundigen überführen, wird dennoch in der Ausführung von großem Nutzen; sie erfordert die Bekanntschaft mit einigen Sätzen, welche am gehörigen Orte eingeschaltet werden sollen.

Aufgabe 14.

Es sind bereits drei Objecte A, B, C, nach den früheren Aufgaben auf dem Meßtisch in a, b, c niedergelegt; man soll die verhältnißmäßige Lage des willkührlich gewählten Standorts X bestimmen, wenn derselbe weder mit A, B, C in einer geraden Linie, noch in der Peripherie des um diese Punkte zu beschreibenden Kreises liegt.

1ster Fall. Die Punkte A, B, C liegen nicht in gerader Linie.

Auflösung I.

a. Der Standort X fällt innerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 41. A).

Man stelle den Meßtisch über den gewählten Punkt X horizontal auf und stecke in einen Punkt x' (Fig. 41. B), der, nach dem Augenmaaß, von dem zu bestimmenden Punkte nicht weit entfernt ist, eine Nadel. Von diesem Punkte visire man nach den gegebenen Objecten A, B, C, wodurch die Visirlinien x'a', x'b', x'c' erhalten werden mögen. Ist x (Fig. 41. A), der zu suchende Punkt, bereits als bekannt angenommen, so werden die beiden Visirlinien nach den äußeren Objecten A und C, nämlich xaA, xaC einen Winkel AxC einschließen, welcher durch die Visirlinie xbB nach dem mittlern Objecte B

beliebig in die Winkel m und n getheilt wird. Wäre nun der angenommene Punkt x′ selbst einen ganzen Fuß von dem wahren x′ entfernt, so wird dennoch diese Abweichung die Größe der Winkel m und n so wenig verändern können, daß dieser Unterschied durchaus nicht merkbar, nicht einmal durch die feinste Bleilinie anzugeben ist. So wird man aber jedenfalls $\angle m''$ (Fig. 41. B) = $\angle m$ und $\angle n''$ (Fig. 41. B) = $\angle n$ setzen, d. h. die erhaltenen Winkel m″ und n″ als die wahren annehmen können. Man trage nun den rechts der mittlern Visirlinie x′a′ liegenden Winkel n″ an den linken Endpunkt der die beiden äußeren Punkte a und c verbindenden Linie ac, und zwar über dieselbe in dac auf, und eben so den links der mittlern Visirlinie gelegenen Winkel m″ an den rechten Endpunkt c, ebenfalls über die Grundlinie ac in fca auf, so daß also dac = n″; fca = m″ sei, welche Winkel nun der Abkürzung wegen mit n′ und m′ bezeichnet werden sollen.

Das Uebertragen dieser Winkel geschieht, falls man damit versehen ist, mit den gewöhnlichen Werkzeugen. Oft werden diese aber dem Geometer augenblicklich fehlen, dann kann man sich auf nachstehende Weise helfen. Man stecke, um den Winkel n″ = BXC aufzutragen, in a eine Nadel, lege das Diopter-Lineal an ac und drehe den Meßtisch durch die Schraube ohne Ende so, daß der Punkt a näher an A liege als der Punkt c, und A in der Visirebene des Werkzeugs erscheine; hierauf legt man das Lineal herum und richtet es an der Nadel auf B ein, worauf man die Visirlinie ad ziehet. Daß aber der so entstandene Winkel cad dem n″ = cxb gleich sein muß,

ist eben so klar, als daß $n''=n$ ist, und hier wurde die mögliche Entfernung des angenommenen x' von dem wahren x noch größer angenommen als bei dieser letzten Operation der Punkt a von x je entfernt sein kann. Auf gleiche Weise kann aber durch nochmaliges Einrichten der Linie ac und durch Ziehen einer Visirlinie von c nach B der Winkel $fca=m$ aufgetragen worden.

Sind nun auf irgend eine Art $dac=n''$ und $fca=m''$ gemacht, so verlängere man die Schenkel ad und cf dieser Winkel nach der Richtung, wo sie sich schneiden, hier also rückwärts bis zu ihrem Durchschnitt in g, verbinde diesen Punkt g durch eine gerade Linie mit dem mittlern Dreieckspunkt b, so wird diese Linie den erhaltenen Winkel agc in beliebige Winkel p und q theilen. Den rechts der Linie liegenden Winkel q trage man gleichfalls über die Grundlinie ac im linken Endpunkt a, in xac an, den links gelegenen Winkel p aber am rechten Endpunkt c in xca, so daß also $xac=q$ und $xca=p$ sei, welche Winkel wir der Kürze wegen durch q', p' bezeichnen wollen. Die Schenkel dieser Winkel, xa, xc werden einander, wenn anders genau gearbeitet worden, in einem Punkte x schneiden, welcher in der Linie bg liegt und der gesuchte Standort ist.

Beweis.

Verfolgen wir die Construction, so wurde dadurch, daß wir $q'=q$ machten, auf der Linie bg ein Punkt x bestimmt, welcher mit a, g und c in der Peripherie eines Kreises liegt. Denn denkt man sich ohne Weiteres die Linie xc gezogen, so sind q' und q gleiche Winkel über

einer geraden Linie, mithin auch als Peripheriewinkel über einerlei Bogen, dessen Sehne xc ist, anzusehen; ist aber hierdurch erwiesen, daß um die genannten Punkte ein Kreis zu legen ist, so ist auch aus denselben Gründen klar, daß $\angle xca = p' = p$ sein muß, oder daß der über die Grundlinie ac in c aufgetragene Winkel p die Peripherie des Kreises nur in x schneiden kann, mithin auch die Linie bg nun in diesen schon durch q′ bestimmten Punkt treffen muß.

Nun ist aber ferner nach der Construction:
$\angle acg = \angle axg$; $\angle cag = \angle cxg$ als Peripheriewinkel;
$\angle acf + acg = 2R$; $\angle cad + \angle cag = 2R$, mithin auch
$\angle acf + \angle axg = 2R$; $\angle cad + \angle cxg = 2R$; es ist aber auch
$\angle axb + \angle axg = 2R$; $\angle cxb + \angle cxg = 2R$; mithin
$\angle axb = \angle acf = n'' = q$ und $\angle cxb = \angle cad = m'' = m$.
Mithin ist x ein Punkt, von wo aus die nach den Mittelpunkten des Dreiecks abc gezogenen Linien xa, xb, xc unter einander solche Winkel m und n einschließen, wie die gleichnamigen Linien aus dem Standort X nach den Richtobjekten A, B, C. Wird demnach eine dieser Linien, z. B. bx, so alignirt, daß sie mit der BX zusammenfällt, und x senkrecht über X gebracht, so müssen auch die andern Linien xa und XA, xc und xC zusammenfallen, weil dann die gleichen Winkel einander decken. Da nun aber auch $\triangle abc \sim \triangle ABC$ ist, so wird, wenn man um die Punkte A, X, C gleichfalls einen Kreis gelegt und durch die verlängerte AX einen Punkt G in der Peripherie desselben bestimmt, denkt, zu erweisen sein, daß $\angle ABX = \angle abx$, mithin auch $\angle CBX = \angle cbx$, d. h. daß die Dreiecke ABC und abc eine parallele Lage erhalten haben, und daß darin:

AB : ab = BX : bx
BC : bc = CX : cx und
AC : ac = AX : ax,

oder daß der Punkt x gegen die a, b, c verhältnißmäßig dieselbe Lage hat, wie der Standort X gegen die Objecte A, B, C.

Aus der Betrachtung, daß wenn die Linie bx oder die Linie bg, in welcher x liegt, mit der XB zusammen fällt, die Dreiecke abc und ABC eine parallele Lage erhalten, ergiebt sich ein anderes Verfahren, um den Punkt x zu bestimmen. Hat man nämlich durch das oben angegebene Verfahren den Punkt g erhalten, so wird das Diopter-Lineal an die Linie bg gelegt und der Meßtisch mittelst der Schraube ohne Ende horizontal herumgedreht, bis daß der Punkt B in die Visir-Ebene tritt, der Punkt b auf dem Meßtisch näher an B liegt als der Punkt g. Hierdurch ist nunmehr der Meßtisch orientirt, und es ist nun leicht, durch Anlegen des Diopter-Lineals an die in a oder c gesteckte Nadel und eine durch Aa oder cC gelegte Visirlinie, welche verlängert wird, den Punkt x auf bg abzuschneiden, wie das schon in den früheren Aufgaben geschehen ist. — Indem wir nämlich die Linie bg fanden und mit B in eine Linie brachten, traten die Punkte B, X in das Verhältniß eines Alignements, die ab ward der AB parallel u. s. w.; dann aber kann, wie schon oben gezeigt worden, der Punkt x durch Seitwärtsabschneiden bestimmt werden. Hätte man auf diese Weise durch eine Visirlinie aA den Punkt x erhalten, so würde eine andere cC als Prüfung der Arbeit dienen können, da sie nothwendig durch eben den Punkt x gehen muß.

b. Der Standort X liege außer dem Dreieck, aber innerhalb des umschriebenen Kreises.

Man stelle den Meßtisch genau über X (Fig. 42. A) auf und nehme auf gleiche Weise, wie im vorigen Falle, einen Punkt x′ (Fig. 42. B) nicht weit von dem wahren x an. Hier wird eine Anschlagnadel eingesteckt und, nach A, B, C visirend, werden die Winkel r′, s′, welche von den Visirlinien x′a′, x′b′, x′c′ eingeschlossen sind, auf den Meßtisch niedergelegt und nachmals über die Grundlinie ac, welche wiederum so gezogen wird, daß sie die beiden äußersten Dreieckspunkte verbindet, wie in der vorherigen Auflösung, wechselsweise aufgetragen, so daß der rechts x′a′ liegende Winkel r′ über ac im linken Endpunkt a und eben so der Winkel s′ in c aufgetragen wird. Da die Winkel r′ und s′ hier, so wie in allen Fällen, wo der Standort außerhalb des Dreiecks gewählt wird, der Natur nach solche Winkel sein müssen, die zusammen kleiner als 180°, so werden ihre Schenkel hier, so wie in den genannten Fällen, vorwärts verlängert werden müssen, um den Durchschnittspunkt g zu bestimmen; durch b und g wird nunmehr eine gerade Linie gezogen, das Meßtischblatt wie vorhin auf B eingerichtet, indem an bg das Diopter-Lineal gelegt und der Meßtisch so herumgedreht wird, daß b näher als g an B ist und B in die Visir-Ebene des Werkzeugs tritt; hierauf wird in a die Anschlagnadel gesteckt und durch Seitwärtsabschneiden der Punkt x in der Linie bg′ bestimmt, zur Prüfung aber wohl auch die Visirlinie durch c auf C gelegt, wie dies schon bei der vorigen Auflösung gesagt worden ist.

Der Beweis für die Richtigkeit des angegebenen

Verfahrens ist mit dem vorhin gegebenen so verwandt, daß ein Jeder ihn ohne Mühe selbst führen wird.

Irrungen im Verfahren selbst sind nicht leicht möglich, wenn man sich streng an die gegebene Vorschrift hält, in welcher als äußere Punkte des Dreiecks allemal diejenigen bezeichnet wurden, welche, wenn man im Dreiecke steht, hinter dem Arbeiter liegen, wenn man aber außerhalb des Dreiecks sich befindet, zunächst der Rechten und Linken des Beobachters sich zeigen; der mittlere Punkt ist aber stets derjenige, welchen man gerade vor sich hat.

c. Der Standort X liege außerhalb des Dreiecks und Kreises, einer Seite des ersteren gegenüber.

Hier, so wie im Falle:

d. wenn der Standort X zwischen den Verlängerungen zweier Seiten des Dreiecks, also einem Winkel desselben gegenüber fällt; ist die Auflösung der Aufgabe ganz so wie die vorherige, und so auch der Beweis dafür.

Für die Fälle b und c wird diese Auflösung der gegebenen Aufgabe immer in den meisten Fällen schwierig bleiben, weil der Punkt g dem Punkte b zu nahe fällt, um die Richtung der geraden Linie bg, in welcher der gesuchte Standort x fallen soll, mit Genauigkeit bestimmen zu können. Fällt aber der Standort X in die Peripherie des um A, B, C gelegten Kreises selbst, dann sind die Winkel r′, s′, welche man bestimmt, offenbar als Peripheriewinkel, die mit den Dreieckswinkeln BAC und BCA

auf einerlei Bogen ruhen, denselben gleich und also auch gleich bac und bca. Trägt man sie demnach über die Grundlinie in den Punkten a und c auf, so fällt auch ihr Durchschnittspunkt g mit b zusammen; demnach ist es nicht möglich die wahre Richtung einer Linie bg anzugeben, mithin auch keine Auflösung dieses Falls denkbar.

Auflösung II.

Mittelst zweier excentrischen Kreise, welche sich in dem zu bestimmenden Punkte schneiden.

a. Der Standort X falle innerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 41. A).

Bei gleichen Annahmen, daß △ABC auf dem Felde und abc auf dem Meßtisch einander ähnlich sind, nehme man auf letzterem wiederum einen nicht weit von dem zu bestimmenden Punkte entfernten Punkt x′ (Fig. 45) an, und bestimme hier, nach der schon wiederholten Angabe, die Winkel m′ und n′, welche den Winkeln m und n, die durch die Linien XA, XB, XC auf dem Felde eingeschlossen sind, gleich sein müssen. Man hat hierdurch die Visirlinien x′a′, x′b′, x′c′, und ziehe nunmehr durch x′ auf die mittlere Visirlinie x′b′ eine Senkrechte d′f′, welche also die Winkel f′x′c′ = n′ — R und d′x′a′ = m′ — R abschneidet. Den so eben genannten Winkel f′x′c′ trage man über die Dreiecksseite bc, welche den rechts gelegenen mit dem mittleren Punkt verbindet, sowohl in b als c, nach außen an; den Winkel d′x′a′ trage man aber auf ähnliche Weise in a und b, ebenfalls nach außen über die Dreiecksseite ab an. Es werden hier-

durch zwei Durchschnittspunkte der Schenkel dieser gleichen Winkel einer jeden betreffenden Seite gegenüber entstehen, wie g und h, aus welchen man mit Halbmessern $bg = cg$ und $bh = ah$, aus g und h Kreisbogen bxc und bxa legt, welche einander, außer im Punkte b, noch im gesuchten Punkte x durchschneiden.

Beweis.

Verfolgen wir die Construction, so machten wir $\angle gab = \angle gba = m' - R$; es ist demnach der Winkel $\varphi = 2R - 2(m' - R) = 4R - 2m'$ und demnach der um den Punkt g liegende hohle Winkel $\alpha = 4R - \varphi = 2m' = 2m$. Dieser Winkel am Mittelpunkt hat aber den äußeren Bogen ab zum Maaße, auf welchem auch, wenn wir ax, bx, cx ziehen, der Winkel axb ruhet; dann aber ist $\angle axb = \frac{1}{2}\alpha$, als Peripheriewinkel nämlich ist er der Hälfte des Winkels am Mittelpunkte, welcher mit ihm auf gleichem Bogen ruhet, gleich, d. h. es ist $\angle axb = m' = m$. Auf gleiche Weise ergiebt sich $\angle\psi = 4R - 2n'$; $\angle\beta = 4R - \psi = 2n$ und $\angle bxc = \frac{1}{2}\beta = n' = n$. Sind aber die Winkel axb, bxc so beschaffen, daß sie den gleichnamigen Winkeln AXB, BXC gleich sind, so ist auch, wie in dem Beweise der vorherigen Auflösungsart, darzuthun, daß, wenn man das Dreieck abc durch eine solche Linie bx auf B orientirt, die anderen Linien ax und AX, cx und CX zusammen und die Dreieckseiten einander parallel fallen; dann aber ist auch darzuthun, daß $ax : Ax = ab : AB$ u. s. w., kurz, daß der Punkt x gegen die a, b, c verhältnißmäßig eine eben solche Lage hat, als der Punkt X zu den Objecten A, B, C, mithin das Bild des Standorts ist.

b. Der Standort X falle außerhalb des Dreiecks und innerhalb des umschriebenen Kreises, oder

c. der gewählte Punkt liege außerhalb des Dreiecks und Kreises, einer Seite des ersteren gegenüber; oder endlich

d. er falle zwischen die Verlängerungen zweier Dreiecksseiten.

Für alle diese Fälle, wo der Standort außerhalb des Dreiecks gewählt wird, leidet die vorhin gegebene Auflösung nur die Abänderung, daß nunmehr $m' + n' < 2R$ werden muß, mithin durch die auf die mittlere Visirlinie gestellte Senkrechte nicht Winkel, welche durch $m' - R$ und $n' - R$, sondern welche durch $R - m'$ und $R - n'$ ausgedrückt werden müssen, entstehen. Diese erhaltenen Supplemente zu m und n trage man nun nicht nach außen, sondern nach dem Innern des Dreiecks zu auf die Seiten, welche durch die einschließenden Visirlinien bezeichnet werden, verlängere deren Schenkel und ziehe aus deren Durchschnittspunkten Kreisbogen, welche sich in b und dem gesuchten x durchschneiden werden.

Der Beweis ist aber auch hier mit geringen Abänderungen ganz so wie der vorhin gegebene, und die Ausführung desselben ist dem Leser zu überlassen.

Liegt aber der Standort X in der Peripherie des um A, B, C gelegten Kreises, so wird sich auch durch das Auftragen der Supplementwinkel nach innen nur ein Durchschnitt aller vier Schenkel, d. h. nur der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ergeben können, mithin aber der Punkt x völlig unbestimmt bleiben, da die Pe-

ripheriewinkel in jedem beliebigen Punkte mit den Dreieckswinkeln einerlei Größe haben müssen.

Auflösung III.

Durch Annäherung.

Wie oben schon angemerkt worden, ist es nothwendig, daß der Angabe dieses Verfahrens einige Sätze vorangeschickt werden müssen; vor allem aber muß bemerkt werden, daß die, die Theorie vom Rückwärtseinschneiden durch Annäherung begründenden, Sätze eigentlich zur reinen Mathematik gehören, allein auch in das Gebiet der angewandten Mathematik eingreifen, in sofern dabei stets das kleine Dreieck, von welchem die Rede sein wird, als auf dem Meßtisch, das große hingegen als auf dem Felde existirend gedacht wird; als ferner vorausgesetzt wird, daß man den Meßtisch über einen bestimmten Punkt aufstellt und ihn nach dem Augenmaß orientirt, so daß also nur eine kleine Drehung des Blattes in einer wagrechten Ebene zur völligen Einrichtung erforderlich ist; daß endlich die durch diese Bewegung des Blattes entstandene Verrückung des als senkrecht über dem Standorte angenommenen Punktes auf dem Blatte so unbedeutend ist, daß sie in Hinsicht der Entfernungen der wahren Visir-Objecte von dem Standorte als eine Differenzial-Größe zu betrachten, d. h. nicht in Rechnung zu bringen ist. —

1ster Lehrsatz.

Werden aus einem, beliebig in oder außerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 44) angenommenen, Punkte X durch die Winkelpunkte jenes Dreiecks Linien AX, BX, CX gelegt und aus einem in der Linie BX beliebig angenommenen

menen Punkte b mit BA, BC die Parallelen ba, bc gezogen, alsdann aber die Durchschnittspunkte a, c durch gerade Linien verbunden, so ist: $\triangle abc \sim \triangle ABC$, und darin

$$AB : ab = BC : bc = AC : ac; \text{ endlich auch}$$
$$AC \text{ parallel mit } ac.$$

Beweis.

Nach der Annahme ist klar, daß:

$$\triangle AXB \sim \triangle axb \text{ und } \triangle BXC \sim \triangle bxc, \text{ mithin:}$$
$$AB : ab = BX : bx \text{ und}$$
$$BC : bc = BX : bx, \text{ folglich}$$
$$AB : ab = BC : bc.$$

Wegen der Parallelen ist ferner:

$$\angle ABX = \angle abx \text{ und } \angle CBX = \angle cbx, \text{ mithin}$$
$$\angle ABX + \angle CBX = \angle abx + \angle cbx, \text{ oder}$$
$$\angle ABC = \angle abc;$$ so aber ist wegen zwei proportionalen Seiten und einem gleichen Winkel

$$\triangle ABC \sim \triangle abc, \text{ und darin}$$
$$AB : ab = BC : bc = AC : ac.$$

Endlich ist auch wegen der Parallelen $\angle BAX = \angle bax$, wegen der ähnlichen Dreiecke $\angle BAC = \angle bac$, mithin $\angle BAX - \angle BAC = \angle bax - \angle bac$ oder $\angle CAX = \angle cax$ daher AC parallel der ac.

2ter Lehrsatz.

Umgekehrt: wenn die Dreiecke ABC, abc (Fig. 44) ähnlich sind und von zweien ihren Seiten erwiesen ist, daß sie parallel liegen, so schneiden sich die durch die gleichnamigen Winkelpunkte A, a, B, b, C, c gezogenen geraden Linien in einem Punkte x.

Beweis.

Zwei dieser zurück gezogenen Linien, z. B. Bb, Cc, werden sich nothwendig in ihrer Verlängerung in irgend einem Punkte x schneiden müssen. Verbindet man ferner die Punkte A, a und a, x durch gerade Linien, so ist

wegen der Parallelen AB und ab $\angle ABX = \angle abX$,

und wegen $\Delta ABC \sim \Delta abc$ $AB : ab = BC : bc$,

aber wegen $\Delta BCX \sim \Delta bcx$ auch $BC : bc = BX : bx$,

mithin $AB : ab = BX : bx$,

demnach aber $\Delta ABX \sim \Delta abx$,

und hierin $\angle AXB = \angle axb$,

demnach fallen aber auch die Schenkel xA, xa in eine gerade Linie zusammen.

3ter Lehrsatz.

Wenn der Punkt X (Fig. 45) mit den Winkelpunkten A, B, C des Dreiecks ABC in der Peripherie eines Kreises liegt, so werden, wenn das ähnliche Dreieck abc mit seinen Seiten denen des Dreiecks ABC nicht völlig parallel liegt, doch die durch die gleichnamigen Winkelpunkte gelegten Linien sich in einem Punkte schneiden.

Beweis.

Werden die Seiten des Dreiecks a′b′c′ den gleichnamigen des Dreiecks ABC parallel gelegt, so ist nach dem vorherigen Satze ein Durchschnittspunkt X für alle drei durch die Winkelpunkte gelegten Visirlinien nothwendig; liegt, der Annahme gemäß, dieser Punkt X in der Peripherie eines um A, B und C zu beschreibenden Kreises, so ist in den entstandenen Vierecken ABCX und a′b′c′x, den Lehren der Elementar-Geometrie gemäß:

$$\angle ABC + \angle AXC = \angle a'b'c' + \angle a'xc' = 2R,$$

mithin auch um die Punkte a, b', c' und x ein Kreis zu legen möglich, alsdann aber:

$$\angle a'xb' = \angle a'c'b' \text{ und}$$
$$\angle b'xc' = \angle b'a'c'$$

als Peripheriewinkel, welche auf einerlei Bogen ruhen.

Wird nunmehr ein Dreieck abc dadurch construirt, daß man aus einem in der Linie Bx angenommenen Punkte b die ab = a'b' bis an die Visirlinie Ax legt und $\angle abc = \angle a'b'c'$ macht, den Durchschnitt c dieses anderen Schenkels mit der Linie xC aber mit a verbindet; so hat dieses Dreieck eine nicht gegen die gleichnamigen Seiten des ABC parallele Lage. Läßt sich nunmehr erweisen, daß dieses Dreieck, durch dessen Winkelpunkte die Visirlinien gehen, dem Dreieck a'b'c' congruent, mithin dem ABC ähnlich sei, so ist auch der obige Satz, mit den Einschränkungen, welche oben vorangeschickt worden, erwiesen.

Es ist aber: $\angle abc = \angle a'b'c'$ nach der Construction, mithin $\angle abc + \angle axc = \angle a'b'c' + \angle a'x'c' = 2R$, mithin auch um die Punkte a, b, c, x ein Kreis zu legen, alsdann aber:

$$\angle bxc = \angle bac = \angle b'a'c'$$
$$\angle bxa = \angle bca = \angle b'c'a'; \text{ da ferner}$$

$ab = \angle a'b'$ nach der Construction, so ist wegen gleicher Winkel und einer gleichen Seite auch

$$\triangle abc \cong \triangle a'b'c' \text{ und}$$
$$\triangle abc \sim \triangle ABC.$$

Wird der Meßtisch über einem Punkte X des Feldes, welcher mit den Punkten A, B, C in dem Umfang

eines Kreises liegt, aufgestellt und schon nach dem Augenmaaße orientirt, so würde bei völliger parallelen Lage der gleichnamigen Seiten der Punkt x′ auf dem Meßtische genau senkrecht über dem X des Feldes fallen, der Punkt x aber, welchen man nach dem Obigen durch die Visirlinien erhalten wird, muß eine andere Lage erhalten; diese Abweichung wird jedoch so unbedeutend sein, im Verhältniß zu den übrigen Längen, daß man dennoch den erhaltenen Punkt als senkrecht über X wird annehmen können.

4ter Lehrsatz.

Liegt der Punkt X (Fig. 46) weder mit den Winkelpunkten A, B, C in einem Kreise, noch mit zweien derselben in einer geraden Linie, und das daselbst aufgestellte Dreieck abc, welches dem ABC ähnlich ist, mit seinen Seiten denen des ABC nicht parallel; so schneiden sich die durch die gleichnamigen Winkelpunkte gelegten Visirlinien in drei Punkten.

Beweis.

Sei angenommen, daß $\Delta abc \sim \Delta ABC$ und daß bei den übrigen Voraussetzungen dennoch durch die gelegten Visirlinien der Punkt x bestimmt würde. Nach Lehrsatz 1 wird es offenbar möglich sein, durch den Punkt b ein dem ABC ähnliches Dreieck a′b′c′ zwischen die Visirlinien zu legen, indem man ba′ ∦ BA, bc′ ∦ BC zieht u. s. w., wo alsdann die Visirlinien sich nothwendig im Punkte x schneiden müssen. Läßt sich nunmehr erweisen, daß ein in jeder andern Lage zwischen diese Visirlinien gelegtes Dreieck abc, welches also jene Eigenschaft besäße,

daß die Visirlinien durch die gleichnamigen Winkelpunkte sich in einem Punkte schneiden müssen, dem ABC nicht ähnlich sein kann; so ist auch der obige Satz in so fern erwiesen, daß bei einem ähnlichen Dreiecke abc nicht ein einziger Durchschnittspunkt statt finden wird.

Da aber die Punkte A, B, C, X, der Annahme gemäß, nicht in der Peripherie eines Kreises liegen, so ist auch

$$\angle ABC + \angle AXC = \angle a'b'c' + \angle a'xc' \gtrless 2R,$$

mithin auch um die Punkte a', b, c', x kein Kreis denkbar; ein durch die Winkelpunkte a', b, c' gelegter Kreis wird demnach die Linie Cx in irgend einem Punkte d, welcher von dem x der Lage nach verschieden ist, schneiden müssen. Zieht man aus d die Linien dc', da', so wird letztere die Linie ac, ab in den Punkten f und e schneiden müssen, da sie außer a' keinen Punkt mit der Linie a'x gemein haben kann.

Ist nun, der Voraussetzung gemäß,

$$\Delta abc \sim \Delta ABC \sim \Delta a'b'c'; \text{ so ist:}$$

$\angle abc = \angle a'b'c'$, und eben so ist $\angle a'dc' = \angle edc$, und also $\angle ebc + \angle edc = \angle a'bc' + \angle a'dc' = 2R$, und also auch um die Punkte e, d, c, b ein Kreis denkbar; alsdann aber ist in beiden Kreisen:

$\angle bdc = \angle ba'c' = bec$, wegen der Annahme, daß $\Delta abc \sim \Delta a'bc'$ ist, aber $\angle ba'c' = \angle bac$,

mithin $\angle bec = \angle bac$,

welches den ersten Sätzen der Geometrie widerspricht, mithin kann Δabc dem a'bc' und also auch dem ABC nicht ähnlich sein.

Ist aber ein ähnliches Dreieck abc in eine verlangte

Stellung gegen das ABC gebracht, so werden immer sich zwei von denen durch die gleichnamigen Punkte gelegten Visirlinien in einem Punkte schneiden müssen; die dritte Visirlinie kann aber dem eben Gesagten zufolge diesen Punkt nicht treffen, muß also jene beiden Visirlinien durchschneiden, entweder ober- oder unterhalb ihres Durchschnittspunktes, und somit werden alsdann, wie oben behauptet ward, drei Durchschnittspunkte gebildet, welche aber die Winkelpunkte des sogenannten, Fehler zeigenden Dreiecks sind.

5ter Lehrsatz.

Wenn die durch die gleichnamigen Winkelpunkte der ähnlichen, aber mit ihren Seiten nicht parallel liegenden Dreiecke abc, ABC (Fig. 47) gelegten Visirlinien sich in den Punkten p, q, r durchschneiden; so ist der zu findende Standort x der Durchschnittspunkt dreier excentrischer Kreise, welche um die Punkte a, b, q; b, c, p und a, c, r gelegt werden können.

Beweis.

Wäre die richtige Lage des Punktes x bereits bekannt und hätte man Linien ax, bx, cx, so wie Ax, Bx, Cx gezogen; so würden diese, wenn man das Dreieck abc in eine Lage brächte (a′b′c′), daß die Seiten desselben denen des ABC parallel wären, dem ersten Lehrsatz gemäß nur eine gerade Linie bilden, d. h. in die Linien Ax, Bx, Cx zusammen fallen. Die Verrückung des abc aus seiner vorherigen Lage, so wie die Entfernung der Punkte p, q, r von dem Punkte x, wird aber, besonders bei der festen Annahme, daß das Dreieck abc schon mög-

lichst orientirt war, so unbedeutend sein, daß man dieselben im Verhältniß zu den Abmessungen Ax, Bx, Cx als Differenzialgrößen betrachten und so die von gleichnamigen Visirlinien an diesen Punkten eingeschlossenen Winkel in beiden Lagen als gleich, so auch die Entfernungen der Punkte cc′, bb′, aa′ als unendlich gering annehmen kann. Auf solche Weise ist aber:

$$\angle\varphi = \angle\varphi'; \quad \angle\psi = \angle\psi'; \quad \angle\omega = \angle\omega',$$

und somit sind auch die gleichen Winkel φ, φ'; ψ, ψ'; ω, ω', als über einerlei Linie liegend, oder als über einerlei Sehne eines Bogens beschrieben anzusehen; dann aber wegen $\angle\varphi = \angle\varphi'$ über der Sehne ab:

1. durch die Punkte a, b, r, x;

wegen $\angle\psi = \angle\psi'$ über der Sehne bc:

2. durch die Punkte b, c, p, x;

und wegen $\angle\omega = \angle\omega'$ über der Sehne ac:

3. durch die Punkte a, c, q, x;

ein Kreis denkbar; diesen drei verschiedenen Kreisen ist demnach der Punkt x gemein, er also ein Durchschnittspunkt derselben und auf die oben angegebene Art zu bestimmen.

Eine oft angeführte Auflösung der vorliegenden Aufgabe ist die, den Punkt x durch die Umtragung der Peripheriewinkel in den genannten excentrischen Kreisen zu bestimmen; eine Auflösungsart, welche sich ebenfalls auf den so eben geführten Beweis stützt, allein in der Praxis unanwendbar ist und deshalb hier auch nicht weiter aus einander gesetzt werden soll.

Die Annahmen aber, welche beim obigen Beweise gemacht wurden, geben uns auch das Recht, alle Visir-

linien-Dreiecke, welche aus einerlei Standort, x, wegen der verschiedenen nicht parallelen Lage des Dreiecks abc entstehen können, als unter einander ähnlich anzunehmen, indem nämlich die Verschiedenheit der Winkel φ, ω, ψ, welche durch diese Abweichungen erzeugt werden kann, immer nur als Differenzialgröße zu betrachten bleibt.

6ter Lehrsatz.

Bei der Lage des Dreiecks abc, wo seine Seiten denen des Dreiecks ABC nicht parallel sind, haben seine Winkelpunkte a, b, c gegen die aus dem Standorte nach den gleichnamigen Winkelpunkten A, B, C des Dreiecks ABC gezogenen Visirlinien Ax, Bx, Cx eine solche Lage, daß $\angle xAa = \angle xBb = \angle xCc$.

Beweis.

Denken wir uns zuvörderst das Dreieck in der Lage a′b′c′, wo es dem Dreieck ABC parallel liegt; denken wir es uns nunmehr in einer horizontalen Ebene verschoben, indem jene sich um irgend einen Mittelpunkt drehet; so läßt sich leicht erweisen, daß die Bogen, welche jeder der Winkelpunkte durchläuft, das Maaß eines solchen Winkels seien, daß demnach bei der neuen Lage des Dreiecks abc die Neigungen der Linien ax, bx, cx gegen ihre frühere Lage dieselben sind, oder daß

$$\angle a'xa = \angle b'xb = \angle c'xc.$$

Da sich ferner die Entfernungen jener Winkelpunkte von x nicht geändert, so ist auch in der neuen Lage wie in der vorherigen:

$$ax : Ax = bx : Bx = cx : Cx$$ und demnach

$\Delta Axa \sim \Delta Bxb \sim \Delta Cxc$, und hierin:

$$\angle xAa = \angle xBb = \angle xCc.$$

Nunmehr läßt sich auch leicht folgern, daß, wenn das Dreieck abc eine nicht parallele Lage hat, die Visirlinien durch die gleichnamigen Punkte, bei der Drehung der Ebene, um dasselbe in eine parallele Lage zu bringen, gleiche Winkel beschreiben werden, nämlich jene, deren Gleichheit so eben erwiesen worden.

7ter Lehrsatz.

Werden aus dem Punkte x auf die, das Visirlinien- oder Fehler zeigende Dreieck bildenden Linien die Senkrechten xs, xt, xu gefällt; so verhalten sich diese senkrechten Abstände des x von den betreffenden Linien, wie die Entfernungen der betreffenden Winkelpunkte des Dreiecks abc von dem Punkte x, d. h. es ist:

$$xs : ax = xt : bx = xu : cx.$$

Beweis.

Nach dem Vorherigen ist:

$$\angle xAa = \angle xBb = \angle xCc.$$

Nach der Annahme aber:

$$\angle Asx = \angle Btx = \angle Cux, \text{ mithin}$$

$$\Delta Asx \sim \Delta Bxt \sim \Delta Cxu, \text{ und darin}$$

$$Ax : xs = Bx : xt = Cx : xu.$$

Es ist aber auch

$$Ax : ax = Bx : bx = Cx : cx, \text{ mithin}$$

$$xs : ax = xt : bx = xu : cx.$$

8ter Lehrsatz.

In den verschiedenen Lagen, welche der Meßtisch mit den darauf bestimmten drei Punkten haben kann, in Hin-

sicht der auf dem Felde gegebenen Objecte, nämlich in dem durch letzter bestimmten Dreieck, außer demselben aber noch innerhalb des um die Punkte beschriebenen Kreises, außerhalb des Dreiecks und Kreises einer Seite des ersteren gegenüber und endlich außerhalb des Dreiecks zwischen den Verlängerungen zweier Seiten desselben; kurz also in allen Fällen, wo die Aufgabe aus drei gegebenen Punkten den Standort zu bestimmen, ausführbar ist, hat, wenn das Δabc eine nicht parallele Lage gegen ABC erhalten, der gesuchte Standort x gegen das Fehler zeigende Dreieck, welches, wie eben bewiesen, jedenfalls entstehen muß, eine der Richtung nach für jeden einzelnen Fall bestimmte Lage, nämlich:

1. Im Standorte X, innerhalb des Dreiecks ABC, (Fig. 47), liegt x innerhalb des Fehler zeigenden Dreiecks pqr.

Beweis. Wäre das Dreieck abc über X so aufgestellt, daß seine Seiten denen des ABC parallel wären, so würde nach dem Obigen ein Durchschnittspunkt x für die drei zurück gezogenen Visirlinien aA, bB, cC entstehen, welcher das Bild des Standortes X ist, und der nothwendig im Innern von abc liegen muß. Wird die Lage des Dreiecks nunmehr verändert und nach a′b″c′, mithin dasselbe nicht parallel gestellt; so wird in diesem Falle auch der Punkt b′, mithin auch die Visirlinie b′B, der Punkt a′ und die Linie a′A, und eben so der Mittelpunkt c′ und die Linie c′C nach einer und derselben Richtung von den betreffenden Punkten und Linien der vorherigen Lage sich entfernt haben, mithin aber ein Visirlinien-Dreieck pqr bilden müssen, welches den zu suchenden

Punkt x umschließt. Wie leicht einzusehen, gilt dasselbe, wenn das Dreieck die Lage abc annimmt, wo sich a und aA, b und bB, c und cC wieder von der ersten parallelen Lage nach einerlei Richtung entfernen und somit das Fehler zeigende Dreieck pqr bilden, welches gleichfalls den Punkt x umschließt.

2. Im Standpunkte X, außerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 48), aber innerhalb des um diese Punkte zu legenden Kreises, liegt der gesuchte Punkt x allemal außerhalb des Fehler zeigenden Dreiecks pqr, und zwar stets neben der Seite pq desselben, welche durch die aus dem mittleren Punkte b gezogene Visirlinie gebildet worden.

Beweis. Sei durch den parallelen Stand des Dreiecks abc der Punkt x bestimmt, da bei jeder Lage des Standorts in dem bestimmten Raume die Visirlinie bB, welche aus dem mittleren Punkte gezogen, allein durch das Dreieck gehen kann, die andern beiden aber nur das Dreieck in den Winkelpunkten berühren können; so wird der Punkt x stets außerhalb abc fallen müssen, wie sich dies auch schon aus den früheren Lehrsätzen bei einigem Nachdenken folgern läßt. Werde nun das Dreieck abc in die Lage a′b′c gebracht, so wird dadurch, daß sich die Winkelpunkte und Visirlinien nach einerlei Richtung von ihren vorherigen Lagen entfernen, die Visirlinie c′C mehr oberhalb, die a′A aber unterhalb der vorherigen Lage fallen und sich in einem Punkt r schneiden müssen, welcher von x nach derselben Seite abweicht, nach welcher sich b′ von b entfernte. Da nun auch die Visirlinie b′B nach derselben Seite abweichen muß, so liegt der Punkt x nunmehr nothwendig außerhalb des entstandenen

Fehler zeigenden Dreiecks; und weil endlich die Linie b'B bei einer proportionalen Abweichung des ganzen Dreiecks nie so schnell von der vorherigen Lage abweichen kann, als der Durchschnitt der beiden nahe gegen einander geneigten, einen spitzen Winkel des Visirlinien-Dreiecks einschließenden und eine entgegengesetzte Richtung annehmenden Visirlinien c'C und a'A verrückt; so wird der Punkt x auch, wie oben gesagt worden, neben der Seite pq des Visirlinien-Dreiecks zu suchen sein, welches durch diese letztere Linie gebildet ward. Denn, wie die Abweichung des Dreiecks abc nach der entgegengesetzten Richtung umgekehrte aber ähnliche Resultate herbei führen muß, ist durch ähnliche Schlüsse nunmehr leicht zu erweisen.

3. Ist der Standort X des Meßtisches so gewählt, daß er außerhalb des Dreiecks ABC (Fig. 50) und des um diese Punkte beschriebenen Kreises einer Seite des Dreiecks gegenüber liegt, dann fällt der gesuchte Punkt x außerhalb des Visirlinien-Dreiecks pqr und zwar neben der Spitze desselben, welche durch die beiden von den äußeren Punkten a und c erhaltenen Visirlinien eingeschlossen wird.

Beweis. Nach den früheren Sätzen schneiden sich die Visirlinien dann, wenn der Punkt X in die Peripherie des Kreises fällt, wieder in einem Punkte; wenn aber der Punkt X über dieselbe hinaus rückt, werden zwar die Visirlinien aus den äußeren Punkten a und c noch eine entgegengesetzte Richtung in Hinsicht ihrer früheren Lage erhalten; allein ihr Durchschnittspunkt r bei der Lage des Dreiecks a'b'c' nunmehr, da sie einen immer stumpferen Winkel des Dreiecks einschließen, langsamer

fortrücken, die Visirlinie b dagegen verhältnißmäßig schneller von ihrer früheren Lage abweichen, wegen der größeren Entfernung des B, und daher über jenen Durchschnittspunkt r hinausfallen; somit aber liegt der gesuchte Standort x außerhalb des Dreiecks pqr und bei dem durch die Visirlinien aus den äußersten Punkten a und c eingeschlossenen Winkel r.

Diese Sätze haben das Verfahren, welches Lehmann beobachtete, um den beliebig gewählten Standort zu finden, begründet; dies ist nämlich das folgende:

Der Meßtisch wird über dem gewählten Punkte aufgestellt und nach dem Augenmaaß oder durch Hülfe der Orientir-Boussole so eingerichtet, daß die Seiten des darauf verzeichneten Dreiecks abc (Fig. 51) nicht weit von der parallelen Lage gegen die gleichnamigen Seiten des ABC auf dem Felde abweichen; hierauf werden nach einander die Visirlinien aus a nach A, aus b nach B und aus c nach C gelegt und zurück gezogen, so daß sie ein Fehler zeigendes Dreieck pqr bilden, aus dessen Lage man entnehmen kann, in welchem Fall man sich in Hinsicht der Lage des Standorts gegen das Dreieck und den umschriebenen Kreis befindet, wie man hier alsbald erkennen würde, daß der Standort X außerhalb des Dreiecks ABC, aber noch innerhalb des umschriebenen Kreises liege. Nach dieser Betrachtung wird man schon nach den Lehrsätzen wissen können, auf welcher Seite der zu findende Punkt liegen muß, wie hier, daß er neben der Spitze r des Visirlinien-Dreiecks zu suchen ist. In dieser Richtung nehme man einen Punkt x′ willkührlich an und schätze nach dem Augenmaaß, oder, bis man einige Fer-

tigkeit im Schätzen erlangt hat, mittle man mit Hülfe des Zirkels das gegenseitige Verhältniß der Entfernungen des angenommenen Punktes von den Dreieckspunkten, d. h. der Linien x′a, x′b, x′c, aus, und errichte auf die betreffenden Visirlinien Senkrechte fx, gx, hx, welche sich in einem Punkte x schneiden werden und dasselbe Verhältniß zu einander haben als die Linien x′a, x′b, x′c. Hat man z. B. (Fig. 52) das Verhältniß der Linien x′a : x′b : x′c = 1 : 2 : 3 gefunden, so fälle man auf die beiden von den äußeren Punkten gezogenen Visirlinien die Senkrechten m′x′, n′x′, indem man hier leicht nach dem Augenmaaß beurtheilen kann, wenn m′x′ so laug ist, daß etwa eine aus x′ auf die aus a gezogene Visirlinie gefällte Senkrechte der dritte Theil derselben wäre. Nun fällt man aus x′ auf die Visirlinie durch b eine Senkrechte x′p′ und beurtheilt, ob sie das verlangte Verhältniß habe. Hier würde man finden, daß dem nicht so sei, und nun einen Ort m wählen, wo man diese Operation wiederholt und ein genügendes Resultat erhalten wird. In den auf diese Art bestimmten Punkt x wird nun eine Nadel gestochen und das Diopter-Lineal an den mittlern Punkt b gelegt, diese Linie alsdann durch Drehung des Meßtisches, wie oft geschehen, auf B eingerichtet. Ohne den Meßtisch zu ändern, wird alsdann eine Visirlinie aA gezogen und so auch eine dritte cC. Ist x der richtige Punkt, so erhält durch die Drehung der Meßtisch die gehörige Lage, so daß die Seiten der Dreiecke parallel liegen und jene gezogenen Visirlinien sich sämmtlich im Punkte x schneiden müssen; ist x aber noch nicht der wahre Punkt, so wird man ein neues viel kleineres Visir-

linien=Dreieck erhalten und durch Wiederholung der genannten Operationen den wahren Punkt x bestimmen können.

Auf ähnliche Weise wird in allen Fällen, die durch die verschiedene Lage des Standortes charakterisirt werden, verfahren, indem man, wie oben gesagt worden, den Fall, in welchem man sich befindet, leicht erkennen und so auch die Senkrechten nach der Richtung, welche der zu bestimmende Punkt haben muß, legen kann.

Da die Erfahrung lehrt, so wie aus den vorangeschickten Sätzen auch zu entnehmen ist, daß die verschiedenen Lagen des Standortes gegen die drei gegebenen Objecte nicht gleich geschickt zur Bestimmung des gesuchten Punktes sind, da vielmehr der Punkt sich innerhalb des Dreiecks und der Kreisschnitte außerhalb des Dreiecks genauer bestimmen läßt, als in den Fällen, wo er außerhalb des Dreiecks und Kreises fällt; so wird man, falls auf dem Meßtisch bereits mehrere Punkte niedergelegt sind, welche man aus dem Standorte übersehen kann, eine Wahl treffen müssen, um die möglichste Genauigkeit herbeizuführen. Daher wähle man unter den Objecten, welche bereits in Grund gelegt sind und welche man übersehen kann, solche aus, von denen zu erwarten ist, daß sich die Visirlinien von den beiden äußersten unter einem nicht sehr von dem rechten Winkel abweichenden schneiden werden und also nicht allein verschiedene Entfernungen vom Standorte haben, sondern auch unter einander nicht nahe beisammen liegen. So wähle man also entweder zwei nahe gelegene und einen entfernten, oder zwei ent-

fernte und einen nahe gelegenen Punkt zu den Richtobjecten aus, von denen man alsdann gleich, um Irrungen zu meiden, die beiden äußersten zu den beiden Seiten gelegenen durch eine gerade Linie verbindet. Befindet man sich innerhalb des Dreiecks, so wird sich der Standort genau bestimmen lassen, wenn sich die zurückgezogenen Visirlinien nicht unter kleineren Winkeln als 45° und nicht unter größeren als 135° schneiden, da alsdann noch die Durchschnittspunkte gut zu erkennen sind. Ist der Standort außerhalb des Dreiecks gewählt, doch noch innnerhalb des Kreises, so läßt sich der Standpunkt weniger genau bestimmen, wenn man zu nahe an der Peripherie oder an der Dreiecksseite steht; im letzteren Falle erhält man sehr große Visirlinien-Dreiecke. — Außer dem Dreiecke und Kreise einer Dreiecksseite gegenüber bestimmt sich der Standpunkt dann am genauesten, wenn man nicht zu entfernt von der Dreiecksseite, doch aber auch nicht zu nahe an der Peripherie den Standort nimmt. — In demselben Falle aber, einem Winkel gegenüber, muß man sich nicht zu sehr vom Winkelpunkte entfernen, weil im Gegentheile die unter zu spitzen Winkeln sich schneidenden Linien Visirlinien-Dreiecke von solcher Beschaffenheit gestalten würden, welche die Bestimmung des Punktes erschweren.

Auflösung IV.

Durch proportionale Theilung der Sehne eines Kreises, welchen man durch zwei homologe Winkelpunkte zweier entgegengesetzt gestalteten Visirlinien-Dreiecke zerlegt denkt.

(Di=

(Directe Methode, welche schnell, genau und in allen Fällen sicherer zum Ziele führt, im Jahre 1815 vom Verfasser erfunden.)

Sei abc (Fig. 53) das Dreieck auf dem Meßtische und durch die nach der ungefähren Orientirung des Werkzeugs zurückgezogenen Visirlinien das Fehler zeigenden Dreiecks pqr erhalten. Man drehe nach der Beurtheilung des Falles, in welchem man sich findet, und nach der hieraus gefolgerten Bestimmung, auf welcher Seite der zu findende Punkt liegen muß, den Meßtisch nach dieser Seite, so daß er wieder ungefähr orientirt sei und seine nunmehrige Abweichung nach der andern Seite habe, so daß ein nunmehr entstehendes Visirlinien-Dreieck p′q′r′ eine dem vorherigen entgegengesetzte Lage habe. Man verbinde nun die Punkte q, q′, welche in beiden Dreiecken durch den Durchschnitt der nach den äußern Punkten gelegten Visirlinien entstanden sind, und verlängere zu beiden Seiten dieselben, welche also nothwendig die Seiten pr und p′r′ der Dreiecke, welche aus der nach dem mittleren Punkte gelegten Visirlinie gebildet werden, in den Punkten s und t schneiden muß. Man errichte nunmehr in q eine Senkrechte qu = qs und ziehe in q′ eine Senkrechte q′s′, welche eine der qs entgegengesetzte Lage hat, so daß q′s′ = q′t. Die Punkte s und s′ verbinde man durch eine gerade Linie, welche die qq′ nothwendig in irgend einem Punkte y schneiden muß; durch y und den mittleren Dreieckspunkt b ziehe man eine gerade Linie; so wird in dieser der gesuchte Punkt x liegen, und, indem man ay auf A einrichtet, durch Seitwärtsabschneiden zu bestimmen sein.

Beweis.

Durch die Construction ist $\Delta qsy \backsim \Delta q's'y'$, und darin

$qy : qs = yq' : q's'$ und, da $qs = qu$ und $q's' = q't$, so ist

$$qy : qu = yq' : q't.$$

Es ist demnach y ein Punkt, welcher die Linie qq' in Theile zerlegt, welche sich wie die anliegenden Querschnitte durch die Visirlinien-Dreiecke verhalten. Sei also x schon als bekannt angenommen, so muß umgekehrt, wenn man xb ziehet, diese Linie die qq' in einem Punkte y schneiden, so daß $qy : qu = q'y : q't$.

Wird der Punkt x als bekannt angenommen, so sind, wie schon oft erwiesen, die Winkel $aqc = axc = aq'c$ wegen der Unmöglichkeit, die geringe Veränderung, welche die Abweichung der Punkte q, c, q' verursacht, anzugeben; es muß sich demnach durch die Punkte a, q, x, q' und c ein Kreis legen lassen. Nach Lehrsatz 6 ist aber auch $\angle xaq = \angle xbr$ und $\angle xcq' = \angle xbr'$. Wird $qu \ddagger rb$ gezogen, so ist aber auch $\angle xwq = \angle xbr = \angle xaq$, mithin w ein Punkt in der Peripherie des um die genannten Punkte gelegten Kreises, und somit auch, wenn man wq' zieht, $\angle xwq' = \angle xcq' = \angle xbr'$, daher $wq' \ddagger br'$; somit ist aber auch

$$\Delta uby \backsim \Delta qwy \text{ und } \Delta tby \backsim \Delta q'wy, \text{ folglich auch}$$

$$uy : qy = yb : yw \text{ und } yt : yq' = yb : yw, \text{ daher}$$

$$uy : qy = yt : yq' \text{ und}$$

$$uy - qy : qy = yt - yq' : yq' \text{ oder}$$

$$uq : qy = q't : yq'.$$

Somit haben wir hier dieselbe Proportion für die Theilung der Linien qq' durch eine aus dem bekannten Punkte

x gezogene Linie nach b erhalten, als wir durch Construction erzeugten, um den Punkt x zu bestimmen. Demnach ist aber erwiesen, daß der Punkt x in einer geraden Linie durch b und y liegen muß, und daß also nach gehörigem Aligniren derselben auch x durch Seitwärtsabschneiden mittelst einer durch a und A oder c und C gelegten Visirlinie bestimmt werden kann, so daß eine dieser Visirlinien immer dem Verfahren als Controlle dienen kann.

2ter Fall. Die Punkte A, B und C liegen in gerader Linie.

Es leuchtet ein, daß in diesem Falle der Standpunkt x entweder in dieser Linie oder außerhalb derselben fallen kann, so wie leicht einzusehen ist, daß im ersten Falle keine Auflösung der Aufgabe, d. h. keine Bestimmung des Standortes durch diese drei Punkte denkbar ist. Ist aber der Punkt X außerhalb dieser Linie gewählt worden, so sind die gegebenen Auflösungsarten auch für diesen Fall anwendbar, und es leuchtet auch ein, daß gleich wie dort bei der Aufstellung außerhalb des Dreiecks der gesuchte Punkt x, im Falle man die Auflösung durch die Annäherungsmethode herbeiführen wollte, neben der Seite des Visirlinien-Dreiecks liegen wird, welche durch den mittleren Punkt gelegt worden ist.

Daß die Punkte, welche zur Bestimmung des Standortes dienen sollen, in gerader Linie liegen, kann häufig und besonders in Gebirgen vorkommen, wo die Standlinien in den Fluß-Ebenen gemessen werden, von wo aus man wenig oder keine Objecte sehen kann, weshalb denn auf den Thalrücken Punkte durch Rückwärtseinschneiden

bestimmt werden müssen, von welchen aus man die Objecte in Grund legt. Man hat aber alsdann nur Punkte in der Standlinie, mithin solche, die in einer geraden Linie liegen, nöthig, um diese Operation ausführen zu können.

Auch kann dieser Fall eintreten, wenn die Standlinie einer Ebene gemessen ist und mit den zu bestimmenden Objecten zu große Winkel macht, so daß also die Visirlinien sich in sehr kleinen Winkeln schneiden, mithin die Lage des wahren Punktes ungewiß werden würde. In diesem Falle nämlich thut man gut, an der Standlinie mehrere Punkte zu bestimmen, um von dort aus jene Objecte unter günstigen Umständen in Grund legen zu können; alsdann aber hat man auch nur zum Behuf des Rückwärtseinschneidens solche Punkte bestimmt, welche in einer geraden Linie liegen.

Siebenter Abschnitt.

Das Aufnehmen der Berge. Das Aufnehmen größerer Erdstrecken, wobei mehrere Meßtischblätter an einander stoßende Sectionen bilden. Verbesserungen des Meßtisches und des Perspectiv-Lineals.

Aufnahme der Berge.

Um Berge in der Aufnahme so zu entwerfen, wie es die Lehmannische Theorie der Bergzeichnungskunst verlangt, muß man sich durchaus zuvor auf folgende Art Uebung und Beurtheilungskraft der so mannichfaltigen Bergformen verschaffen; wer nicht so verfährt und mit Bürgers Schäfer glaubt: das hab' ich von meiner Frau Mutter geerbt, der wird — und pfuschte er in allen Künsten und Wissenschaften — ewig ein Stümper bleiben. Nachdem man aber auf solche Weise sich Uebung und Beurtheilungskraft erworben, wird man auch von selbst die leichtere Methode zur Aufnahme der Berge abstrahiren und über die Leichtigkeit und Genauigkeit, womit dies bewerkstelligt werden kann, erstaunen. Die erste Einübung ist am vortheilhaftesten in Gegenden des Mittelgebirgs vorzunehmen. Flache Gegenden, wie z. B. die unsrige, bieten hierzu durchaus keine Gegenstände dar.

Man wähle zuerst, wo möglich, ein rund in sich geschlossenes Ganzes, einen isolirten Erdberg oder eine isolirte aus mehreren Bergen bestehende Gruppe; in unserer Nähe ist die Gruppe der Müggelsberge das Einzige, was sich nur einigermaaßen dazu eignet. — Um den gewählten Berg stecke man mit dem Schmalkalderschen Höhenmesser zwei oder drei in verschiedener Höhe liegende Horizontalen ab, bezeichne diese von Distanz zu Distanz, ferner auch die Kuppen, Schluchten, Kanten u. dergl. mit numerirten Pflöcken oder Pikets. Dann werden von den Pflöcken oder Pikets, welche die Horizontalen bezeichnen, so viele, als man sehen kann, von dem ersten Endpunkte einer am Fuße des Berges gemessenen Standlinie anvisirt, und von dem zweiten Endpunkte derselben geschnitten. So erhält man auf dem Meßtische das Bild von einigen dieser, verschiedene Horizontalen bezeichnenden Punkte. Um die übrigen Punkte in denselben Horizontalen zu bestimmen, wähle man als dritten Standort einen bereits auf dem Meßtischblatte gut bestimmten Punkt, von welchem man die meisten noch unbestimmten Punkte sehen kann, in irgend einer dieser Horizontalen aus, stelle über ihn den Meßtisch so auf, wie dies früher gelehrt worden, richte letzteren mittelst der darauf bestimmten Punkte ein, und visire nachdem nach allen noch zu bestimmenden Punkten in den Horizontalen. Sodann wähle man einen ebenfalls auf dem Meßtische bestimmten Punkt, von welchem aus man dieselben Punkte sehen kann, nach welchen aus dem dritten Standorte Visirlinien gezogen worden sind, als vierten Standort aus, stelle über ihn den Meßtisch auf, richte letzteren ein, schneide die aus dem dritten

Standorte gezogenen Visirlinien und setze dieses Verfahren so lange fort, bis alle, die Horizontalen, Kuppen und Schluchten bezeichnende Pflöcke oder Pikets auf dem Meßtischblatte rücksichtlich ihrer gegenseitigen Lage bestimmt sind.

So wie alle diese Punkte bestimmt sind, wird das Meßtischblatt abgenommen und zwischen je zwei und zwei Punkten an Ort und Stelle das betreffende Stück Horizontale eingezeichnet. Dasselbe verrichtet man auch mit den Schluchten. Aus der Theorie der Bergzeichnung findet sich, nachdem die Horizontalen des Berges auf dem Meßtischblatte ausgezeichnet worden, die Richtung des Rückens, der Schluchten, Kanten und endlich der Schraffirstriche oder Neigungslinien. Mißt man noch an verschiedenen Stellen des Berges je zwischen zwei und zwei Horizontalen die Größe des Böschungswinkels, entweder mit dem Schmalkalderschen Höhenmesser oder mit einem kleinen Quadranten, so wie diesen die Artilleristen gewöhnlich beim Werfen zum Richten des Mortiers gebrauchen, so hat man genug Data, um die Auszeichnung des Berges der Theorie gemäß vollenden zu können. Dieser Quadrant, welchen man im Nothfalle von Pappe selbst anfertigen kann, bestehet aus einem Quadrat abce (Fig. 54), auf welchem der eingetheilte Bogen von 90°, dessen Halbmesser $\alpha\gamma$ und $\alpha\beta$ ‡ mit ac und ab sind verzeichnet worden. Im Centro α befestigt man einen Faden, welcher in d mit einer Bleikugel beschwert wird. Will man am Fuße C eines Berges den Böschungswinkel ACB desselben messen, so bringe man die Seite ab des Quadranten in die Richtung von AC; so giebt das Loth d des Quadranten, wenn

γ für allemal den Nullpunkt der Theilung bezeichnet, den Bogen γd, welcher das Maaß des Winkels ACB ist, an. Visirt man von der Höhe A, so muß man ebenfalls ab in die Richtung AC bringen, und so ist ebenfalls Bogen γd das Maaß vom $\angle$ACB. Der Beweis für beide Fälle erhellet aus der Figur.

Schlechter als der Schmalkaldersche Höhenmesser ist ein solcher Quadrant allerdings. Denn nicht allein, daß es sich sehr unsicher ablesen läßt, weil das Loth gern beim Umlegen des Quadranten vor dem Ablesen seine Stelle verändert, sondern auch hauptsächlich, weil man nicht mit dem Quadranten wie mit ersterem die im Niveau liegenden Terrainpunkte bestimmen kann, was bei dem Schmalkalderschen Höhenmesser so leicht ist.

Zum Abstecken der Horizontalen gebraucht man den Schmalkalderschen Höhenmesser folgendermaßen. Man stelle sich auf der Böschung des Berges auf, visire durch das Ocular des Höhenmessers und drehe denselben so um sein Zentrum, daß der Nulltheilstrich der Eintheilung mit dem Haare des Objectiv-Diopters eine einzige gerade Linie bildet; dann bedeckt dieses Haar alle mit dem Auge des Beobachters gleich liegenden Punkte, und man kann diese Punkte auf dem Terrain mit Pikets bezeichnen lassen. Zur Fortsetzung des Absteckens stellt man sich etwas tiefer als das letzte Piket auf, richtet sich durch den Höhenmesser in das Niveau des letzten Pikets ein und steckt nun neben demselben die folgenden Punkte der Horizontale aus.

Bei dem Abstecken der Horizontalen ohne Höhenmesser benutzt man entweder das Lehmannische Diopter-

Lineal, bei welchem zu diesem Behuf zuvor der Querfaden des Objectiv-Diopters mit dem gewählten Ocularloch gleich hoch zu stellen ist, oder man visirt gleich über die Fläche des zuvor mit der Dosenlibelle horizontal gestellten Meßtisches weg, verfährt in beiden Fällen bei Fortsetzung der bereits durch einige Punkte bezeichneten Linie eben so wie mit dem Höhenmessen und richtet sich bei jeder neuen Aufstellung ins Niveau des zuletzt abgesteckten Pikets ein.

Aufnahme größerer Erdstrecken, wobei mehrere Meßtischblätter aneinanderstoßende Sectionen bilden.

Bei der sächsischen Landesaufnahme, die an Genauigkeit und Eleganz noch von keiner andern Aufnahme erreicht worden ist, obschon die Bezeichnung der Berge nicht nach der Lehmannischen Theorie bewerkstelligt wurde, sondern nach einer dem Sächsischen Ingenieur-Corps eigenen, obschon ziemlich der Lehmannischen Theorie nahe kommenden Manier geschah, wurde das Zusammenstoßen von vier Meßblättern, deren jedes eine Quadratmeile enthielt, zu einer Section folgendermaßen bewerkstelligt.

Zuvörderst wurden die aufzunehmenden vier Quadratmeilen von einem Ingenieur recognoscirt und flüchtig im kleinen Maaßstabe aufgenommen; in dieser, größtentheils nach dem Augenmaaße entworfenen, Skizze der Gegend bemerkte man die schicklichsten Standorte für den Meßtisch und diejenigen Punkte, auf welchen die zur Vermessung nöthigen Signale aufzustellen waren. Nachdem die Signale aufgestellt und die Hauptstandorte des Meßtisches in dem Boden durch leicht aufzufindende Kennzeichen, eingelassene Hölzer u. s. w., für die Folge

bemerkt waren, wurde auf einen großen, den Raum von vier Quadratmeilen im Maaßstabe der Aufnahme fassenden Meßtisch, dessen Blatt 25—26 Zoll lang und eben so breit war, das Netz dieser vier Quadratmeilen mit der größten Sorgfalt genau aufgenommen.

Sobald alle Hauptpunkte dreimal genau geschnitten waren, wurden vier Meßtische, deren Blätter 15—16 Zoll lang waren, mit Papier überzogen und auf jeden derselben ein Quadrat von 12 Zoll Seitenlänge verzeichnet. Auf den Ueberzug des großen Meßtisches, welcher die Hauptpunkte des Netzes enthielt, wurde ein Quadrat von einer Elle Dresdener Maaß aufgetragen und dieses in 4 kleinere Quadrate von 12 Zoll Seitenlänge getheilt, dann aber derselbe abgeschnitten. Das abgeschnittene Netz wurde auf ein kleines Meßtischblatt gelegt und die vier Eckpunkte eines Viertels mit Nadeln oder Copierzwecken so durchstochen, daß die Spitzen derselben genau in die vier Winkelpunkte des auf dem kleinen Meßtische verzeichneten Quadrats trafen. Hierauf wurden alle Netzpunkte dieses Viertels mit einer feinen Nadel durchstochen, so wie auch alle diejenigen Punkte, welche außerhalb dieses Viertels noch auf dem kleinen Meßtischblatte Platz fanden. Um jeden auf das kleine Meßtischblatt gestochenen Punkt wurde ein kleiner Kreis mit Bleistift gezogen, die Benennung des Punktes daran geschrieben, das ganze Verfahren, welches man Präpariren nannte, mit den übrigen drei Meßtischen und den übrigen 3 Vierteln des Netzes wiederholt, das Blatt des Netzes sorgfältig aufgehoben und endlich auf den vier kleineren Meßtischen die Aufnahme des Details vorgenommen.

Auf jeden der vier kleinen Meßtische wurde das täglich aufgenommene Detail sogleich mit Tusch ausgezeichnet und das Quadrat der Meile bis zu einer Entfernung von einer Linie von jeder Randlinie mit Tusch, die Ränder aber mit Blei ausgezeichnet. Dann wurden die vier Meßtischblätter nach ihrer Ordnung oben auf das große Netzblatt durch die Winkelpunkte mit Nadeln auf die Winkelpunkte des Netzblatts aufgesteckt und die zwei Linien breiten Ränder der vier kleinen Meßtischblätter reinlich mit Mundleim über einander geleimt und so zu einem Ganzen vereint.

Die in Blei entworfenen Randlinien wurden hierauf mit Tusch ausgezeichnet, dadurch erlangte man die Genauigkeit des Zusammentreffens der Sectionen, und obgleich vier Arbeiter an einer Section gearbeitet hatten, so war es doch nicht möglich den geringsten Unterschied in der Zeichnung zu bemerken.

Bei der Aufnahme einer Flur mit dem Meßtisch verfährt man am besten folgender Weise. Man mißt, wenn die Flur lang und so breit ist, daß man ihre Grenzen von einer durch die Mitte der Flur gelegten Standlinie übersehen kann, diese Linie und verpfählt dieselbe von 5 zu 5 Ruthen mit Pflöcken, die gemeinhin zu diesem Behuf mit römischen Zahlen numerirt werden. Ist aber die Flur von einer größeren Ausdehnung, als daß man ihre Grenze aus der Mitte übersehen kann; so messe man zwei einander in der schicklichsten Lage durchkreuzende Standlinien, welche eben so verpfählt und bezeichnet werden. In diesen Standlinien wählt man nun die am schicklichsten gegen die zu bestimmenden Punkte gelege-

nen Nummerpfähle zu den Hauptstandorten des Meßtisches, und visirt und schneidet von ihnen aus alle zu beiden Seiten der Standlinie liegenden Punkte so weit, als sie sich nicht unter zu spitzem Winkel schneiden. Mehrere von diesen Punkten, die man in Verfolg der Arbeit wiederum zu Hauptstandorten des Meßtisches, zur Bestimmung anderer Punkte benutzen will, muß man suchen dreimal zu schneiden.

Vorher gehet man das von dreien Pikets in der Standlinie als Standorte übersehbare und aus demselben aufzunehmende Stück mit den Gehülfen durch und besteckt mit Pikets, welche mit arabischen Ziffern bezeichnet sind, alle aufzunehmende Punkte und Linien, so daß die Ordnung der Zahlen der Ordnung des Ganges entspricht. Hierbei werden krummlinigte Grenzen der Aecker in einer solchen Distanz mit Pikets besteckt, daß der Bogen, der zwischen zwei zunächst auf einander folgenden Pikets liegenden krummen Linie nicht über zwei Fuß von der durch diese beiden Pikets gezogenen geraden Linie abweicht. Der Gehülfe notirt dabei in ein Manual die Ordnung der Pikets und schreibt, wenn sie besonders ausgezeichnete Gegenstände bezeichnen, sogleich ihre Benennung dazu.

Ueber dem ersten zum Standorte gewählten Piket der Standlinie stellt man den Meßtisch auf, orientirt ihn und bestimmt den Anfangspunkt aus der Richtung der Standlinie, sodann aber schickt man den mit einer Meßfahne versehenen Gehülfen fort, um sich in den zu bestimmenden Punkten aufzustellen. Der Gehülfe geht auf Nr. 1, hält auf dem Piket die Meßfahne senkrecht und

ruft dem Geometer zu: Eins; dieser richtet sein Visirwerkzeug auf die Fahne ein, zieht die Visirlinie mit Blei, bezeichnet sie mit 1 und giebt durch einen Wink oder ein anderes verabredetes Zeichen dem Gehülfen zu erkennen, daß er seinen Weg fortsetzen soll, wobei jener die eben signalisirte Nummer mit einem Strich im Manuale anstreicht. Ohne dieses Verfahren sind, bei der Menge der zu bestimmenden Punkte, kaum Irrungen zu vermeiden; beobachtet man es aber genau, so wird man auch den höchsten Grad der Genauigkeit erreichen und über die Schnelligkeit des Fortgangs der Arbeit erstaunen.

Kann man, wenn der Gehülfe eine Nummer zuruft, diesen nicht sehen, so ruft man ihm zu: hoch! worauf derselbe sich so über das Piket stellt, daß es ihm zwischen den Füßen steckt und die Meßfahne so hoch empor hält, daß der Stock derselben sein Gesicht und der Schuh seine Brust berührt. Sobald man nun die sichtbar gewordene Meßfahne visirt hat, so giebt man, weil er es nicht sehen würde, kein Zeichen zum Fortgehen, sondern ruft ihm Marsch! zu.

So verfährt man auf allen übrigen Standorten und kann, wenn man wegen der Durchschnitte der Linien in einem Zweifel sein sollte, allemal im Manual des Gehülfen ersehen, wie oft und in welcher Ordnung die Punkte signalisirt worden. Nachdem auf dem letzten Standorte die meisten Punkte zwei- oder dreimal gut geschnitten worden, untersucht man, ob der Meßtisch noch gut orientirt stehe, welches man überhaupt in jedem Standorte nach vollendeter Arbeit vornehmen muß, um begangene Fehler gleich an Ort und Stelle verbessern zu

können. Dann werden neue Visirlinien nach den von dem nächsten Hauptstandorte zu schneidenden Punkten gezogen, das Meßtischblatt vom Stativ genommen, an Ort und Stelle die Grenzen zwischen je zwei und zwei Punkte eingezeichnet und die Beschaffenheit des Bodens nach Art und Güte notirt.

Um den ersten Ueberzug des Meßtisches voll zu arbeiten, wählt man, wenn man längs der Standlinie alle darauf gehende Haupstandorte besucht hat, die am besten dreimal geschnittenen Punkte zu Standorten, schneidet von ihnen aus alle Linien, deren Punkte noch nicht geschnitten, und setzt so die Arbeit fort. Hierbei können im Verfolge der Arbeit alle früher gezeigten Aufgaben in Anwendung kommen; wie und wo kann nur aus der Beschaffenheit der aufzunehmenden Flur hervorgehen, weshalb sich kein Beispiel davon geben läßt.

Sollte niederes Gebüsch die Aussicht nach zu bestimmenden Punkten verhindern, so bediene man sich des von mir erfundenen Waldsignals, worüber meine Vermessungskunde, 1ster Theil, Seite 58 u. f. nachzulesen ist.

Dörfer werden in der Regel so aufgenommen, daß man von außen die Lage des Thurms und der ausgezeichneten Gebäude, die Priesterwohnung, Amt, Lehngericht u. a. m. nebst den Umzäunungen der Gärten bestimmt, dann aber eine Standlinie durch dasselbe legt, Standorte in derselben nimmt und von beiden Seiten die Fronten der Häuser schneidet.

Hat man ein Meßtischblatt voll gearbeitet, so bestimmt man sich auf dem nächstfolgenden Blatte die am Rande des vorigen Blattes gefallenen Punkte noch einmal, und

benutzt sie zu dem Zusammenstoßen der Blätter. Sind am Rande des ersten und der folgenden Blätter keine ausgezeichnete Punkte der Flur zu bestimmen, so ersetzt man deren Stelle durch aufgerichtete oben mit Strohwischen versehene Stangen oder andere künstliche Signale.

Vom Rückwärtseinschneiden wird man bei ökonomischen Aufnahmen nur wenig Gebrauch machen; desto mehr wird man aber bei militairischen Aufnahmen diese zweckmäßige Lehre anwenden können.

Bei der Bestimmung des Details in militairischen Aufnahmen arbeitet man in der Regel von den Höhen nach den Tiefen hinab, und von der freien waldlosen Gegend nach der durchschnittenen hin. In jedem Hauptstandorte untersucht man vor Anfang der Arbeit, was für Alignements rund im Horizonte diese Standpunkte schneiden, giebt sie auf beiden betreffenden Rändern mit Visirlinien an und schreibt ihre Benennung daran. Zuweilen giebt man sogar ihr Bild mit wenigen Strichen neben den Visirlinien an, um sie in andern Standorten oft mit vieler Zeitersparniß sogleich zur leichten Einrichtung des Meßtisches benutzen und aus ihnen den neuen Standpunkt auf dem Meßtische mit wenig Mühe finden zu können.

Alle Krümmungspunkte der Wege und Flüsse, die Ränder der Wälder, die Umzäunungen der Dörfer und Gärten werden durch Rückwärtseinschneiden bestimmt und von den dadurch gefundenen Standpunkten sogleich Visirlinien nach den nächsten Gegenständen, z. B. Bergkuppen, isolirten Bäumen und dergl. mehr gezogen. Man giebt am besten die Visirlinien an den Rändern des Blattes

an, um weniger das Papier zu beschmutzen, und schreibt ihre Benennung und den Standpunkt, aus welchem sie gezogen, daran, um bei der nachherigen Auszeichnung dieser Linien nicht zu irren.

Die Wege im Innern der Wälder werden dann erst aufgenommen, wenn die Ränder und Eingänge der Wälder bereits von außen aufgenommen sind; dann verfolgt man einen jeden Eingang bis zu dem Punkte, wo mehrere Wege sich kreuzen, und nimmt zuletzt den Zusammenhang der Wege im Innern auf.

Bei Aufnahmen von Colonnenwegen, deren Länge mehrere Meßtischblätter füllen würde, hilft man sich auf folgende einfache Weise, die auch bei Fluß-, Grenz- und Straßen-Aufnahmen in ökonomischer Hinsicht anwendbar ist.

Man überzieht nämlich das auf dem Meßtisch aufgespannte Papier (Fig. 55) mit Quadraten und fängt in einem derselben, z. B. in a, die Aufnahme des Weges an, bis man am Ende in b wegen des Blattes Rande nicht fortarbeiten kann. Nachdem man sich mit den Linien bd in B auf dem Felde auf dem verlassenen Standort D des Feldes eingerichtet hat; so nimmt man bc mit dem Zirkel ab, trägt diesen Abstand in ein unteres Quadrat, z. B. von g bis h, visirt von h nach R, ziehet hr und fährt von neuem fort, den Weg bis i aufzunehmen. Zur Fortsetzung der Arbeit wählt man alsdann unten k in einer solchen Lage gegen das Quadrat wie oben i, und so fährt man bis zum Ende des Weges fort. Wenn sich auch selbst die Wege, wie hier im Beispiele, kreuzen, so schadet es nichts, wenn nicht zu viel

Ne-

Nebenterrain aufzunehmen ist, oder gerade dies in einem Dorfe der Fall ist; will man aber dasselbe vermeiden, so kann man oben bei l aufhören und unten hg = lm machen.

Ist man solchergestalt mit Aufnehmen des Colonnenweges und des zunächst desselben rechts und links liegenden Terrains fertig, so legt man die Aufnahme auf einen großen Bogen und durchsticht mit Copiernadeln zuerst alles, was zum Wege ab gehört, nebst den Punkten n, o, p und q. Man ziehet durch die auf dem Papier copirten Punkte n, o eine feine Bleilinie, legt die Aufnahme so auf das Papier, daß der Punkt h genau den Punkt b und die Randlinie pq die vorher durch n und o auf der Copie gezogene Bleilinie decken, und durchsticht in dieser Lage alles, was zum Wege hi gehört; so fährt man fort, bis die ganze Aufnahme copirt ist, und zeichnet zuletzt alles aus.

Auf diese Weise kann man eine ziemliche Strecke Weges aufnehmen und zuletzt doch ohne Mühe denselben in der Copie in seinem Zusammenhange darstellen.

Neuere Methode, die Berghorizontalen bei Aufnahme der Berge in der Zeichnung zu bestimmen, ohne dieselben vorher auf dem Terrain abzustecken.

Diese Methode, auf welche ich durch die Praxis gekommen bin, ist leicht zu erlernen, erfordert keinen Zeitverlust bei der Aufnahme und macht das vorherige Abstecken der Horizontalen unnütz. Man gebraucht dazu einen Böschungsmaaßstab, so wie ihn Lehmann angiebt, und den Schmalkalderschen Höhenmesser oder den Quadranten; auch

kann man das dabei dem Anfänger vorgeschriebene Abschreiten der Linien bei gehöriger Uebung und erworbenem Augenmaaße in bloßes Schätzen verwandeln.

Es sei A (Fig. 56) der Standort des Meßtisches auf dem Berge, a der senkrecht über demselben liegende Standpunkt auf dem Meßtische. Will man nun eine ober- oder unterhalb des Standortes um den Berg gehende Horizontale bestimmen, so schreite man von A nach und nach in den Richtungen AB, AC, AD . . . . . AH so weit fort, als der Boden sich ståte oder doch nur gering concav oder convex abböscht, mache am Ende einer jeden Linie in B, C, D . . . H ein vom Meßtische aus sichtbares Zeichen auf dem Boden und messe mit dem Schmalkalderschen Höhenmesser die Neigung der Linien AB, AC, AD . . . . AH. Sodann kehre man zum Meßtische zurück und visire aus a nach B, C, D . . . . H, die Visirlinien ab, ac, ad . . . . ah ziehend. Hätte man vorher

AB	unter	5^0	Neigung	= 150	Schrtite	
AC	=	10^0	=	= 45	=	
AD	=	15^0	=	= 30	=	
AE	=	25^0	=	= 35	=	
AF	=	30^0	=	= 25	=	
AG	=	15^0	=	= 60	=	und
AH	=	5^0	=	= 100	=	

gefunden; so trage man nach dem verjüngten Maaßstabe diese Weiten aus dem Scheitelpunkte des Böschungsmaaßstabes auf die ihnen zugehörigen Neigungslinien als die wahren Entfernungen auf, ziehe durch den zunächst der Grundlinie des Böschungsmaaßstabes liegenden Punkt, welches der Endpunkt der auf die Neigungslinie

von 15 Grad aufgetragenen Weite von 30 Schritten ist, eine Parallele mit der Grundlinie, und nehme von dieser die horizontalen Entfernungen unter den oben gefundenen Böschungswinkeln ab. Trägt man diese nach und nach auf die Visirlinien aus a nach i, k, l, m, n, o, p; so hat man das Bild eines Stücks der durch D gehenden Horizontale iklmnop, nach welcher man sogleich die Richtung der Schraffirstriche angiebt.

Zur Fortsetzung der Arbeit bestimme man von einem andern Standorte ein anderes Stück einer Horizontale, welches nicht mit dem erst gefundenen zusammenhange, durch das man aber doch im Stande sein wird, die Richtung der Schraffirstriche zu bestimmen; und so verfährt man, bis man rund um den Berg herum ist.

Verbesserungen des Meßtisches und des Diopter-Fernrohrs.

Der Umstand, daß die Schraube ohne Ende bei den nach Sächsischer Art angefertigten Meßtischen sich öfter durch langen Gebrauch in sandigen Gegenden ausschleift und einen todten Gang verursacht, veranlaßte mich, auf die einfachste Zusammensetzung eines Meßtisches zu denken, der zwar der besondern Verrichtung der feinen Bewegung entbehrt, dessen ungeachtet aber leicht und vollkommen genau mit der Hand auf jede Linie einzurichten ist, wenn man das Meßtischblatt, mit beiden Händen an zwei gegenüber stehenden Ecken anfassend, dreht, dabei aber äußerst leicht und sehr standfest ist.

Ferner habe ich das beschriebene Diopter-Fernrohr mit einer Vorrichtung zum Nivelliren und einer beson-

dern Theilung versehen, die bei Höhenmessungen die trigonometrische Berechnung erspart und durch eine einfache Multiplication die Höhe giebt. Ich lasse beide Werkzeuge unter meiner Aufsicht anfertigen und erbiete mich, Liebhabern den ersteren für 20 Rthlr. und das letztere für 46 Rthlr. zu besorgen. Auswärtige ersuche ich aber, jedesmal der Bestellung die Hälfte des Betrags portofrei beizufügen, ohne welches ich auf sonstige Anfragen oder Aufträge mich nicht einlasse, da meinerseits kein Eigennutz dabei beabsichtigt wird, und Mangel an Zeit diese Einrichtung zu treffen nöthig macht.

Anleitung

zur

Auflösung trigonometrischer Aufgaben

ohne

Anwendung der Logarithmen und der trigonometrischen Hülfslinien.

Einleitung.

Die Erleichterungen, welche die Anwendung der trigonometrischen Elementar-Aufgaben in der sogenannten praktischen Geometrie gewährt, sind so bekannt, daß es unnöthig sein würde, sich hier über den ausgebreiteten Nutzen derselben weitläufig auszulassen; es ist aber auch bekannt, daß der weniger Geübte diese Aufgaben schon wegen der darin angenommenen Benutzung der sogenannten trigonometrischen Hülfslinien zu umgehen sucht, daß die feineren Operationen mit denselben, vor Allem aber der hiebei unumgänglich nöthige Gebrauch der trigonometrischen Logarithmen-Tafeln ihn abschrecken und auf einem weiteren Wege mit minderer Genauigkeit ihn das suchen lassen, was ihm durch jene Operationen so leicht zu erreichen sein würde. Endlich ist es aber auch unläugbar, daß Soldat und Feldmesser oft in den Fall kommen, diese Aufgaben mit Nutzen bei ihren Verrichtungen anwenden zu können, durch den augenblicklichen Mangel jener Tafeln aber sich daran gehindert finden.

Diese Betrachtungen scheinen einen Versuch, die benannten Aufgaben ohne Hülfe jener Linien und Tafeln zu lösen, wenn das Verfahren hiebei so geeignet ist, daß

die Resultate die möglichste Genauigkeit ergeben, zu rechtfertigen, und die Hindeutung ihrer Anwendbarkeit auf im gemeinen Leben vorkommende Fälle derselben für den Praktiker von einigem Nutzen zu machen.

Weit entfernt, diesem Versuche den Stempel der Neuheit aufzwingen zu wollen, soll im Gegentheile hier angegeben werden, wie schon berühmte ältere Mathematiker sich mit demselben beschäftigten, wenn gleich sie hier mehr wissenschaftliche Spielereien fanden, als den Resultaten praktischen Nutzen beimaßen, wie dies A. G. Kästner in seinen geometrischen Abtheilungen (Arithm. Anfangsgründe, Th. 1. Abth. 3) bezeugt und hier die Versuche, welche Snellius, Girard, Beselin u. a. längst vor ihm machten, durch eigenes Nachdenken erweiterte.

Wenn gleich bei einem Verfahren, wie das hier vorgetragene, nie eine mathematische Genauigkeit erlangt werden kann und die Theorie also keine Erweiterung findet; so läßt uns die Betrachtung, daß die Praxis in allen Fällen nur die Wahrheit zu erlangen strebt, sie aber nie erreichen kann, daß der Zweck auch jene Genauigkeit gar nicht verlangt, hoffen, daß auch diese in vielen Fällen erleichternde Verfahrungsart einen gewissen Nutzen haben dürfte, wodurch wir uns bestimmt fanden, jene Versuche der Aelteren zusammenzustellen, wo es thunlich zu erweitern, die Abweichungen der Ergebnisse von der Wahrheit anzudeuten und die Anwendungen für die Feldmeßkunst anzugeben.

§. 1.

Lehrsatz. Sei eine Linie AB (Fig. 1) in den Punkten D und H so getheilt, daß die Theile AH=HD =DB; sei aus D mit HD=DB über AB ein Halbkreis AGCB beschrieben, aus A eine Berührende an denselben gelegt und diese so weit verlängert, bis sie in C die aus B auf AB errichtete Senkrechte BC schneidet, dann ist, wenn die Sehne BC gezogen wird, die Tangente BC gleich jener Sehne, d. h. BC=BG.

Beweis. Es ist $\angle AGD = R$ und $DG = \frac{1}{2} DA$, mithin nach der Elementar-Geometrie

$$\angle GAD = 30^0;$$

alsdann aber ist auch $\angle ADG = 60^0$, $\angle GDB = 120^0$, und weil $\angle GDB + \angle GCB = 180^0$, auch

$$\angle GCB = 60^0.$$

Da nun ferner DG=DB, mithin auch $\angle DGB = \angle GBD$, so ist auch

$\angle CGB = \angle CBG = \frac{120^0}{2} = 60^0 = \angle GCB$, und also Δ GCB gleichseitig, mithin

$$BC = BG.$$

Zusatz. Da der Bogen BG größer als die Sehne BG ist, so ist auch

$$BC < \text{Bogen } BG.$$

§. 2.

Lehrsatz. Wird aus A (Fig. 1) irgend eine andere Linie so durch den Halbkreis gelegt, daß sie denselben in irgend einem Punkte E zwischen B und G schneidet und die in B errichtete Senkrechte im Punkte F trifft;

so ist der Abschnitt BF der Senkrechten stets größer als die Sehne des Bogens BE.

Beweis. Nennen wir, nachdem die Linie DE gezogen, den Winkel $BDE = \alpha$, die aus E gefällte Senkrechte $EI = b$, den Abschnitt $DI = a$ und den Halbmesser $DE = r$; so ist $b = r \sin \alpha$, $a = r \cos \alpha$ und

$$AI = AD + DI = 2r + a = r(2 + \cos \alpha);$$

alsdann aber $\frac{EI}{AI} = \text{tang } EAI = \frac{b}{2r+a} = \frac{r \sin \alpha}{r(2 + \cos \alpha)}$

$$= \frac{\sin \alpha}{2 + \cos \alpha}, \text{ und nun auch}$$

$$FB = AB \,.\, \text{tg } EAI = 3r \,.\, \frac{b}{2r+a}, \text{ oder auch}$$

$$FB = r \,.\, \frac{3 \,.\, \sin \alpha}{2 + \cos \alpha}.$$

Die Sehne BC ist aber gleich dem doppelten Sinus des halben Winkels oder

$BE = 2r \,.\, \sin \frac{1}{2}\alpha$, mithin findet das Verhältniß statt:

$$FB : BE = r \,.\, \frac{3 \sin \alpha}{2 + \cos \alpha} : 2r \sin \tfrac{1}{2}\alpha$$

$$= \frac{3 \sin \alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha (2 + \cos \alpha)} : 1,$$

welches sich wegen der bekannten Formel:

$\sin \alpha = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \,.\, \cos \frac{1}{2}\alpha$ noch dahin verkürzen läßt, daß

$$FB : BE = \frac{2 \,.\, \cos \frac{1}{2}\alpha}{2 + \cos 3\alpha} : 1.$$

Soll in diesem Verhältniß der obige Lehrsatz seine Bestätigung finden, so muß hier das Glied $\frac{3 \cos \frac{1}{2}\alpha}{2 + \cos \alpha} > 1$ sein, mithin muß der Nenner kleiner als der Zähler bleiben; dies läßt sich aber durch folgende Betrachtung erweisen.

Es ist bekanntlich $2 + \cos\alpha = 1 + (1 + \cos\alpha) = 1 + 2\cos\frac{1}{2}\alpha^2$. Setzen wir nun in diese Formel $\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}$, so wird $3\cos\frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}$ und $1 + 2 . \cos\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{3}{2}$, mithin dieses Glied gleich 1; für jeden größeren Werth von $\cos\frac{1}{2}\alpha$ wird aber der Nenner wegen seiner quadratischen Natur kleiner als der Zähler, das Glied also ein unächter Bruch bleiben. Ein Winkel aber, dessen Cosinus größer als $\frac{1}{2}$, muß bekanntlich kleiner als 60° sein, mithin wird jener Satz seine Richtigkeit haben, wenn $\frac{1}{2}\alpha < 60^0$ oder $\alpha < 120^0$ ist, welches bei der Annahme, daß der Punkt E zwischen B und G falle, stets der Fall sein muß.

Zusatz. Da der verlängerte Halbmesser BE die Senkrechte BC oberhalb F schneiden würde, so ist der Theil BF zwar größer als die Sehne, aber kleiner als die Tangente des Bogens oder Winkels BDE. Da bei kleineren Winkeln bekanntlich Tangente und Sehne immer näher an einander fallen, so wird jener Abschnitt, welcher dem Bogen immer näher kömmt, als jene Grenzen, diesem auch immer mehr nahe kommen und zuletzt völlig demselben gleich gesetzt werden können.

§. 3.

Aufgabe. Es seien (Fig. 1) in dem rechtwinklichen Dreiecke DEI die Seiten DE = r, DI = a, EI = b, wie vorhin bekannt: es soll, mit Bezugnahme des Vorhergehenden, ohne Hülfe trigonometrischer Linien eine Größe ermittelt werden, welche der des Winkels EDI = α möglichst nahe kömmt.

Auflösung. Bei gleichen Annahmen und Benen-

nungen der Seiten, wie im Vorhergehenden, finden wir die Proportion:

$$AI : EI = AB : FB \text{ oder}$$

$$2r + a : b = 3r : FB, \text{ mithin wie dort}$$

$$FB = \frac{3 \cdot r \cdot b}{2r + a}.$$

Sehen wir nun, nach den vorhergehenden Ermittelungen, diese Größe von FB als wenig verschieden von der des Bogens BE an, welcher den gesuchten Winkel mißt; so ist $\frac{FB}{r}$ die Größe dieses Bogens für den Halbmesser = 1, und falls wir diesen Werth noch durch die Größe eines in Decimaltheilen ausgedrückten Grades dividiren, wird auch das Resultat die Größe jenes Bogens oder Winkels in Gradtheilen ergeben.

Die Größe eines Gradbogens in Theilen des Halbmessers ist aber bekanntlich für den Halbmesser = 1 durch die Formel $\frac{\pi}{100} = \frac{3,14159\ldots}{180}$ zu finden und hiernach dieser constante Faktor $1^0 = 0,01745328\ldots$ oder

$$\log. 1^0 = 0,2418774 - 2;$$

und benennen wir nun im Allgemeinen die Gradzahl des gesuchten Winkels für alle ähnliche Fälle mit x^0, so wird nach dem obigen:

$$x^0 = \frac{\frac{3 \cdot b}{2r + a}}{0,01745328} \text{ oder}$$

$$\log x^0 = \log(3 \cdot b) - \log(2r + a) - 0,2418774 - 2.$$

Der kürzeren Rechnung wegen werden wir uns hier, so wie in allen künftigen Fällen, bei den Beispielen der Rechnung mit Logarithmen bedienen, obwohl nicht

unterlassen werden soll, die Formeln anzugeben, wie man ohne diese Hülfsmittel, bei Ermangelung der Tafeln, im Felde zu gleichen Resultaten gelangen kann.

§. 4.

Beispiel 1. Sei in einem rechtwinklichen Dreieck die Hypothenuse $r=34$; die Cathete $a=30$; die Cathete $b=16$, so ist:

$$\log x^0 = \log(3.16) - \log(2.34+30) - 0{,}2418774 - 2.$$

$$\log 48 = 1{,}6812412$$
$$\log 98 = 1{,}9912261$$
$$0{,}6900151 - 1$$
$$- \quad 0{,}2418774 - 2$$
$$1{,}4481377 = \log 28{,}0632, \text{ mithin}$$
$$x^0 = 28{,}0632^0 = 28^0\ 3'\ 47{,}56''.$$

Mit Hülfe der trigonometrischen Linien erhielten wir aber wegen

$$\sin\alpha = \frac{b}{r}$$
$$\log b + 10 = 11{,}2041200$$
$$\log r = 1{,}5314789$$
$$\log\sin\alpha = 9{,}6726411 \text{ und hiernach beinahe}$$
$$\alpha = 28^0\ 4'\ 21'',$$

so daß also durch die oben angegebene Methode der Winkel um etwas über eine halbe Minute zu klein gefunden worden.

Beispiel 2. Es sei in einem rechtwinklichen Dreiecke bei ähnlicher Bedeutung der Buchstaben: $r=113$; $b=15$; $a=112$, dann ist:

$$\log x^0 = \log(3.15) - \log(2.113 + 112)$$
$$- 0{,}2418774 - 2$$

$$\begin{array}{rl} \log\ 45 = & 1,6532125 \\ \log\ 338 = & 2,5289167 \\ \hline & 0,1242958 - 1 \\ - & 0,2418774 - 2 \\ \hline & 0,8824184 = \log 7,62813, \end{array}$$

und daher

$$x^0 = 7,62813^0 = 7^0\ 37'\ 41,268''.$$

Die trigonometrische Rechnung wird dagegen hier ergeben:

$$\begin{array}{rl} \log 6 + 10 = & 11,1760913 \\ \log.\ r = & 2,0530784 \\ \hline \log\ \sin\ \alpha = & 9,1230129 \end{array}$$

und hiernach

$$\alpha = 7^0\ 37'\ 41,4''$$

und somit in vorhergehender Rechnung der Winkel nur um beinahe $\frac{2}{10}$ Secunden zu klein gefunden.

§. 5.

Im Vorhergehenden (§. 3) fanden wir $\frac{FB}{r} = \frac{3b}{2r+a}$. Wenn wir nun wie dort diesen Werth für den Halbmesser $= 1$ als x^0 setzen, so können wir durch Veränderungen noch einen andern Weg einschlagen, um zum obigen Zwecke zu gelangen; es ist nämlich

$$\frac{3b}{2r+a} = x\ .\ 1^0 \text{ und } \frac{b}{2r+a}\ .\ \frac{3}{1^0} = x.$$

Hier ist $\frac{3}{1^0}$ ein beständiger Faktor, indeß sich der andere nach der jedesmaligen Beschaffenheit des Dreiecks ändert. Nun ist aber, wenn wir denselben mit δ benennen:

$$\delta = \frac{3}{0,017453\ldots} = 171,888 \text{ und}$$

$$\log \delta = 2,2352469.$$

Diesemnach wird nun auch allgemein mit Beibehalt der obigen Bezeichnungen:

$$x = \frac{b}{2r + a} \cdot 171{,}888 \text{ und}$$

$$\log x = \log b + 2{,}2352469 - \log (2r + a).$$

§. 6.

Beispiel 1. Sei unter jenen Voraussetzungen:

$r = 18{,}5$; $b = 6$; $a = 17{,}5$, so wird:

$$\log x = \log 6 + 2{,}2352469 - \log (2 \cdot 18{,}5 + 17{,}5)$$

$$\begin{aligned}
\log 6 &= 0{,}7781513 \\
&\ \underline{2{,}2352469} \\
&\ 3{,}0133982 \\
\log 54{,}5 &= \underline{1{,}7363965} \\
\log x &= 1{,}2770017 = \log 18{,}9235 \text{ oder} \\
x &= 18^{0}\ 55'\ 24{,}6''.
\end{aligned}$$

Durch Hülfe der Trigonometrie würde dagegen:

$$\begin{aligned}
\log 6 + 10 &= 10{,}7781513 \\
\underline{\log r} &= \underline{1{,}2671717} \\
\log \sin \alpha &= 9{,}5109196, \text{ mithin} \\
\alpha &= 18^{0}\ 55'\ 28{,}7''
\end{aligned}$$

gefunden, woraus sich ergiebt, daß die erstere Rechnung den Werth um 3,9″ zu klein ergab.

Beispiel 2. In einem rechtwinklichen Dreiecke sei:

$r = 181$; $a = 19$; $b = 180$, dann ist:

$$\log x = \log 180 + 2{,}2352469 - \log (2 \cdot 181 + 19)$$

$$\begin{aligned}
\log 180 &= 2{,}2552725 \\
&\ \underline{2{,}2352469} \\
&\ 4{,}4905194 \\
\log 381 &= \underline{2{,}5809250} \\
&\ 1{,}9095944 = \log 81{,}2072, \text{ mithin}
\end{aligned}$$

$$x = 81{,}2072^{0} = 81^{0}\ 12'\ 25{,}92''.$$

Trigonometrisches Verfahren würde dagegen ergeben:

$$\log b + 10 = 12{,}2552725$$
$$\log r = 2{,}2576786$$
$$\log \sin \alpha = 9{,}9975939, \text{ mithin}$$
$$\alpha = 83^\circ\ 58'\ 27{,}8'',$$

so daß also in der früheren Rechnung der Winkel nur $2^\circ\ 46'\ 1{,}9''$ zu klein gefunden worden ist.

§. 7.

Aus dem Vorhergehenden und besonders aus dem letzten Beispiele können wir entnehmen, wie die Bestimmung großer Winkel bedeutenden Fehlern unterworfen ist, und wir können schließen, daß es eine Grenze geben muß, bis zu welcher man die Abweichung der erhaltenen Resultate von der Wahrheit übersehen darf. Versuche und feinere in den höheren Calcul eingreifende Untersuchungen haben ergeben, daß Winkel, welche die Größe von $22\frac{1}{2}^\circ$ nicht überschreiten, noch so genau bestimmt werden können, als man sie bei der Ausübung bedarf, und daher die Grenze für diese Bestimmungen bis $22\frac{1}{2}^\circ$ festgestellt. Ohne uns in jene Versuche einzulassen, wollen wir hier nur zeigen, wie die Abweichung zwischen dem Bogen und dem uns unter der Bezeichnung FB bekannten Abschnitt der Senkrechten bei $22\frac{1}{2}^\circ$ noch höchst unbedeutend ist.

Wenn wir nämlich (Fig. 1) über der Linie AB den Winkel BAE so bestimmen, daß er genau $22\frac{1}{2}$ mißt und denselben $= m$ setzen; so wird nach (§. 2. I)

$$FB = r\,\frac{3 \sin m}{2 + \cos m}, \text{ und für diesen Fall:}$$

$$FB = r \, . \, \frac{3 \, . \, 0{,}3826834}{2 + 0{,}9238795} = 0{,}39264 \, . \, r.$$

Der Bogen BE aber ist bekanntlich $= \frac{\pi . r . m}{180}$ und für diesen Fall

$$\text{Bog. } BE = \frac{3{,}14159 \, . \, 22\frac{1}{2}}{180} \, . \, r = 0{,}39269 \, . \, r.$$

Diese Werthe der Senkrechten und des Bogens weichen aber erst in den fünften Dezimalstellen von einander ab und können also für unseren Gebrauch, wo die Länge des Radius sich selten zu einer so bedeutenden Größe erstreckt, daß jene Stelle zu Einern wird, als gleich angenommen werden; ist dies aber der Fall, so werden auch die Resultate, welche obige Rechnungsarten bei Winkeln geben, die unter $22\frac{1}{2}^0$ bleiben, für uns als völlig richtig anzusehen sein.

§. 8.

In jedem rechtwinklichen Dreiecke aber wird einer der Winkel (wenn jenes nicht gleichschenklich ist und dann beide 45^0 betragen), eine geringere Größe als 45^0 besitzen, und alsdann durch Halbtheilung desselben zwei Winkel, welche jene Grenze von $22\frac{1}{2}^0$ nicht erreichen, gebildet und bestimmt werden können, wie dies im Folgenden angegeben werden soll, wenn wir zuvor die nächstfolgenden Aufgaben gelöset haben werden.

§. 9.

Aufgabe. Es soll eine Regel aufgefunden werden, nach welcher man beurtheilen kann, ob der kleinste Winkel eines gegebenen rechtwinklichen Dreiecks kleiner als $22\frac{1}{2}^0$ sei.

Auflösung. Hier, so wie bei allen künftig zu betrachtenden Dreiecken, sollen der Kürze wegen die Bezeichnungen, wie folgt, angegeben werden.

Die Hypothenuse = a.
Die größere Cathete = b.
Die kleinere — = c.
Der kleinere spitze Winkel = m.
Der größere spitze Winkel = n.

Nun sei in einem bei B (Fig. 2) rechtwinklichen Dreiecke die Größe der einschließenden Catheten in üblichem Maaße bekannt und hierbei $AB > BC$, mithin auch $\angle C > \angle A$; so ist bekanntlich $AB : CB = 1 : \text{tg } A$, und demnach

$$\text{tg } A = \frac{BC}{AB}.$$

Es ist aber $\text{tg } 22^0\ 30' = 0{,}4$ und etwas mehr; giebt demnach $\frac{CB}{AB}$ einen kleineren Quotienten als 0,4, so ist der Winkel A auch kleiner als $22\frac{1}{2}^0$ und zu unseren Untersuchungen geeignet. Die hieraus zu abstrahirende Regel heißt demnach:

Man dividire durch die größere Cathete in die kleinere und vergleiche den erhaltenen Quotienten mit dem Bruch 0,4; ist er größer, so ist der der kleineren Seite gegenüber liegende Winkel größer, im Gegentheile aber kleiner als $22^0\ 30'$.

§. 10.

Aufgabe. Es sind die drei Seiten a, b und c eines rechtwinklichen Dreiecks ABC (Fig. 3) gegeben, in welchem eine Linie CD den Winkel bei C halbirt; man soll die Abschnitte AD und DB, welche durch letztere

in der Linie AB bewirkt werden, durch Rechnung bestimmen.

Auflösung. Man verlängere die Seite AC und mache CF = CB, ziehe alsdann BF, so ist:

$\angle ACB = \angle CFB + \angle CBF$ als äußerer Winkel, aber auch

$\angle CFB = \angle CBF$, weil nach der Construction CF = CB, mithin

$\angle CFB = \frac{1}{2} \angle ACB = \angle DCB$, und somit

$FB \# CD$ und $\Delta ACD \backsim \Delta AFB$, alsdann aber

$AC : CF = AD : DB$, oder auch, wegen CF = CB,

$AC : CB = AD : DB$, und nach den bekannten Bezeichnungen

$a : b = c - DB : DB$

$a + b : b = c : DB$, und endlich

$$\text{I. } DB = \frac{c \cdot b}{a + b}.$$

Der andere Abschnitt der Linie AB ist nunmehr leicht auszudrücken, nämlich:

$$\text{II. } AD = c - DB = c - \frac{c \cdot b}{b + a} = \frac{c \cdot a}{b + a}.$$

Eben so kann nun auch die Größe der theilenden Linie CD mit Leichtigkeit bestimmt werden; denn es ist:

$$CD = \sqrt{CB^2 + BD^2}, \text{ oder}$$

$$\text{III. } CD = \sqrt{b^2 + \frac{c^2 b^2}{(b+a)^2}} = \frac{b\sqrt{(b+a)^2 + c^2}}{b + a}.$$

§. 11

Aufgabe. Es werden die Formeln zur Bestimmung des Winkels m verlangt, wenn nur die beiden Catheten des rechtwinklichen Dreiecks, c und b, nicht aber

die Hypothenuse a bekannt, und schon ausgemittelt ist, daß m nicht über $22\frac{1}{2}^0$ beträgt.

Auflösung. Fanden wir uns in §. 7. berechtigt, die Senkrechte FB dem Bogen BE (in der dahin gehörenden Figur) für einen Winkel $m = 22\frac{1}{2}^0$ gleich zu setzen; so erhalten wir auch durch die dortigen Werthe: $FB = \frac{3c}{2a+b} \cdot a$ (§. 2. I) und Bog. $BE = \frac{\pi \cdot r \cdot m}{180}$, wenn wir $m = m'$ setzen, die Gleichung

$$\frac{3c}{2a+b} = \frac{\pi m}{180} \text{ und}$$

$$m = \frac{3 \cdot 180}{\pi} \cdot \frac{c}{2a+b}.$$

Hier ist der Werth $\frac{3 \cdot 180}{\pi} = \frac{3}{1^0}$ nichts anders als der bereits (§. 5) ermittelte constante Faktor δ, und daher auch hier:

$$m = \frac{c}{2a+b} \cdot \delta.$$

Nun ist aber $a = \sqrt{c^2 + b^2}$, und demnach

$$m = \frac{c\,\delta}{b + 2\sqrt{c^2 + b^2}} = \frac{b \;.\; 111{,}888}{a + 2\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

woraus sich die Proportion ableiten läßt:

$$b + 2\sqrt{c^2 + b^2} : \delta = c : m.$$

§. 12.

Beispiel. In einem rechtwinklichen Dreiecke sind die Catheten $b = 471$ und $c = 169$ gegeben; es soll der b gegenüber liegende Winkel m bestimmt werden. Da hier $\frac{c}{b} = \frac{169}{471} < 0{,}4$, so ist nach §. 9. $\angle m < 22\frac{1}{2}^0$, und man erhält:

$$b^2 = 221841$$
$$c^2 = 28561$$
$$c^2 + b^2 = 250402$$
$$\sqrt{c^2 + b^2} = 500,4$$
$$b + 2\sqrt{c^2 + b^2} = 1471,8,$$ demnach
$$\log m = \log 169 + 2,2352469 - \log 1471,8$$
$$\log 169 = 2,2278867$$
$$2,2352469$$
$$4,4631336$$
$$\log 1471,8 = 2,1678488$$
$$1,2952848 = \log 19,7372,$$
und demnach
$$m = 19,7372^0 = 19^0\ 44'\ 13,92''.$$
Durch Trigonometrie finden wir: $\frac{c}{b} = \operatorname{tg} m$, demnach
$$\log c + 10 = 12,2278867$$
$$\log b = 2,6730209$$
$$\log \operatorname{tg} m = 9,5548658,$$ und endlich
$$m = 19^0\ 44'\ 18,7'',$$
so daß der bei der vorherigen Bestimmung begangene Fehler etwas über 4 Secunden beträgt, welche immer keinen wesentlichen Einfluß haben können.

§. 13.

Aufgabe. Es finde bei einem rechtwinklichen Dreiecke ABC (Fig. 4), in welchem die Seiten AB=c und BC=b bekannt sind, jenes Verhältniß $\frac{c}{b} < 0,4$ nicht statt; es soll demnach der Winkel m möglichst genau angegeben werden.

Auflösung. Wie schon in §. 8. angegeben worden, wird einer der beiden spitzen Winkel im gegebenen Dreiecke immer so beschaffen sein müssen, daß seine Hälfte kleiner als $22\frac{1}{2}^0$ ist, und dies ist allemal der, der kleineren Cathete c gegenüber liegende Winkel m.

Wir halbtheilen den Winkel m durch eine Gerade DC, so ist $\angle DCB = \frac{1}{2}\alpha < 22\frac{1}{2}^0$, und nach dem Vorherigen ist derselbe im Dreiecke BDC zu bestimmen möglich, indem

$$BC + 2CD : \delta = DB : \tfrac{1}{2}m, \text{ oder (nach §. 10.)}$$

$$b + 2 \cdot \frac{b\sqrt{(b+a)^2 + c^2}}{a+b} : \delta = \frac{c \cdot b}{a+b} : \tfrac{1}{2}m.$$

$$\frac{b(a+b) + 2b\sqrt{(b+a)^2 + c^2}}{a+b} : \delta = \frac{c \cdot b}{a+b} : \tfrac{1}{2}m.$$

Wird hier im ersten und dritten Gliede der gleiche Faktor $\frac{b}{a+b}$ weggelassen und das dritte und vierte Glied mit 2 multiplicirt, so erhält man:

$$b + a + 2\sqrt{(b+a)^2 + c^2} : \delta = 2c : m.$$

Wird endlich unter dem Wurzelzeichen des zweiten Gliedes die Multiplication ausgeführt und $c^2 = a^2 - b^2$ gesetzt und dieser Werth reduzirt, so ist:

$$a + b + 2\sqrt{2a(a+b)} : \delta = 2c : m, \text{ und endlich}$$

$$\alpha = \frac{2 \cdot c \cdot m}{a + b + 2\sqrt{2a(a+b)}},$$

woselbst das a nur zur Verkürzung der Formel beibehalten ist und durch $\sqrt{c^2 + b^2}$ leicht zu bestimmen sein wird.

§. 14.

Beispiel 1. Sei $b = 217$, $c = 153$, dann ist:

$$b^2 = 47089$$

$$c^2 = 23409$$
$$c^2 + b^2 = 70498$$
$$\sqrt{c^2 + b^2} = 265{,}514 = a$$
$$a + b = 482{,}514$$
$$2a(a + b) = 256228{,}444$$
$$\sqrt{2a(a+b)} = 506{,}19$$
$$a + b + 2\sqrt{2a(a+b)} = 1494{,}894$$
$$2 \cdot c \cdot \delta = 2 \cdot 153 \cdot 171 \cdot 888 = 52597{,}7 \text{ mithin}$$
$$m = \frac{52597{,}7}{1494{,}894} = 35{,}185^0 = 35^0\ 11'\ 6''.$$

Durch trigonometrische Rechnung würden wir dagegen erhalten:

$$\log c + 10 = 12{,}1846914$$
$$\log. b = 2{,}3364597$$
$$\log tg\ m = 9{,}8482317, \text{ und sonach}$$
$$m = 35^0\ 11'\ 2{,}39'',$$

welcher Unterschied auch unbedeutend und nicht von Einfluß ist.

Beispiel 2. Sei $b = 325$, $c = 237$, und die Ausführung mit Hülfe der Logarithmen zu bewirken.

Es ist $b^2 = 105625$
$$c^2 = 56169$$
$$c^2 + b^2 = 161794$$
$$\sqrt{c^2 + b^2} = 402{,}236 = a$$
$$a + b = 727{,}236$$
$$\log a + b = 2{,}8616754$$
$$\log a = 2{,}6044810$$
$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log 2a(a + b = 5{,}7671864$$
$$\log \sqrt{2a(a+b)} = 2{,}8835932 = \log 764{,}88$$
$$a + b + 2\sqrt{2a(a+b)} = 2256{,}996.$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \delta = 2{,}2352469$$
$$\log c = \underline{2{,}3747483}$$
$$\log 2\,\delta c = 4{,}9110252$$
$$\log.\ (a+b+2\sqrt{2a(a+b)}) = \underline{3{,}3535309}$$
$$\log m = 1{,}5574943 = \log 36{,}0989$$

daher $m = 36{,}0989^{\circ} = 36^{\circ}\ 5'\ 55{,}44''$.

Trigonometrisches Verfahren würde dagegen geben:

$$\log c + 10 = 12{,}3747483$$
$$\log b = \underline{2{,}5118834}$$
$$\log \operatorname{tg} m = 9{,}8628649 \text{ und daher}$$
$$m = 36^{\circ}\ 6'\ 2{,}44'',$$

mithin jenes erstere Resultat um $7''$ zu klein.

§. 15.

Aufgabe. In einem rechtwinklichen Dreiecke ABC (Fig. 2) ist die Cathete BC=c und der gegenüberliegende Winkel m gegeben, der letztere aber so, daß $m < 22\frac{1}{2}$; man soll die fehlende Cathete AB=b durch Rechnung ohne Benutzung der trigonometrischen Linien finden.

Auflösung. Nach dem Vorhergehenden ist:

$$m = \frac{c\delta}{b + 2\sqrt{c^2 + b^2}} \text{ (§. 11), mithin}$$
$$bm + 2m\sqrt{b^2 + c^2} = c\delta$$
$$2m\sqrt{b^2 + c^2} = c\delta - bm$$
$$4m^2(b^2 + c^2) = c^2\delta^2 - 2bc\delta m + b^2m^2, \text{ und demnach}$$
$$4m^2b^2 - b^2m^2 + 2bc\delta m = c^2\delta^2 - 4m^2c^2$$
$$3m^2b^2 + 2bc\delta m = c^2(\delta^2 - 4m^2)$$
$$b^2 + \frac{2bc\delta}{3m} = \frac{c^2(\delta^2 - 4m^2)}{3m^2}$$

$$b = -\frac{c\delta}{3m} \pm \sqrt{\frac{c^2\delta^2}{9m^2} + \frac{c^2(\delta^2 - 4m^2)}{3m^2}}$$

$$b = \frac{-c\delta \pm c\sqrt{\delta^2 + 3\delta^2 - 12m^2}}{3m}$$

$$b = \frac{c}{3m}[-\delta \pm 2\sqrt{\delta^2 - 3m^2}].$$

Von den beiden vor dem Wurzelzeichen stehenden Zeichen kann, wie leicht einzusehen ist, hier nur das + gebraucht werden; daher wird endlich

$$b = \frac{c}{3m}[2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta],$$

oder, wenn man hieraus eine Proportion formen will:

$$c : b = 3m : 2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta.$$

Beispiel. Sei $c = 178'$ und $m = 19^\circ 43' 2''$ gegeben, so ist

$$m = 19{,}7217, \quad m^2 = 388{,}945$$
$$\delta = 171{,}888, \quad \delta^2 = 29515{,}5$$
$$\delta^2 - 3m^2 = 28349{,}565$$
$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 168{,}37$$
$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 336{,}74$$
$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta = 164{,}852.$$
$$c(2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta = 29343{,}656$$
$$\frac{c}{3m}[2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta] = b = 496{,}962.$$

Durch trigonometrische Rechnung würde man hier erhalten:

$$\log \operatorname{tg} \operatorname{comp} m - 10 = 0{,}4456429$$
$$\log c = 2{,}2504200$$
$$\log b = 2{,}6960629, \text{ und daher}$$
$$b = 496{,}65 \text{ u. s. w.},$$

welche Verschiedenheit in der ersten Dezimale bei genauerer Bestimmung der m und der übrigen Dezimalbrüche

wegfallen und sich erst, wie oben gesagt worden, in der zweiten äußern müßte.

§. 16.

Aufgabe. Es soll, wenn in einem rechtwinklichen Dreiecke die kleinere Cathete b und der Winkel α gegeben sind, bei letzterem aber nicht die obige Einschränkung statt findet, die fehlende Cathete a durch Rechnung gefunden werden.

Auflösung. Setzen wir im Dreiecke ABC (Fig. 4) die Summe der Seiten

$AC + BC = y$ und BC als die gesuchte $= b$; so ist:

$AC = y - b$. Es ist aber auch $AC^2 = AB^2 + BC^2$,

mithin $(y - b)^2 = c^2 + b^2$, oder

$y^2 - 2by + b^2 = c^2 + b^2$, mithin

$2by = y^2 - c^2 = (y + c)(y - c)$ und also auch:

$$2y : y + c = y - c : b;$$

woraus denn erhellt, daß die Größe b leicht gefunden werden kann, sobald erst y bekannt ist. Nun war aber (§. 13) die Formel für m dergestalt gefunden, daß, wenn man die dort eingeführte Substitution von $c^2 = a^2 - b^2$ nur hinaus schafft:

$$m = \frac{2c\delta}{a + b + 2\sqrt{(a + b)^2 + c^2}} \text{ war;}$$

hierin ist aber das $a + b$ nichts anders als das gegenwärtige y, daher denn auch:

$$m = \frac{2c\delta}{y + 2\sqrt{y^2 + c^2}}.$$

Hier wird nun das y bestimmt werden können, und zwar ist:

$$my + 2m\sqrt{y^2 + c^2} = c\delta$$

$$2m\sqrt{y^2 + c^2} = 2c\delta - my$$

$$4m^2(y^2 + c^2) = 4c^2\delta^2 - 4c\delta ym + m^2y^2$$

$$3m^2y^2 + 4c\delta my + 4c^2\delta^2 - 4c^2m^2$$

$$y^2 + \frac{4c\delta y}{3m} = \frac{4c^2(\delta^2 - m^2)}{3m^2}$$

$$y = \frac{2c}{3m}(-\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 3m^2}),$$

und, da endlich auch hier nur das + vor dem Wurzelzeichen gebraucht werden kann:

$$y = \frac{2c}{3m}(\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} - \delta),$$

welches die Proportion giebt:

$$3m : \sqrt{4\delta^2 - 3m^2} - \delta = 2c : y.$$

Setzt man hier zur Abkürzung $\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} - \delta = A$, so läßt sich zur Bestimmung der in den Aufgaben verlangten Größe b und der gegebenen m und c folgende Regel geben:

Man suche zuvörderst A;
alsdann setze man $3m : A = ac : y$;
endlich bestimme man aus $2y : y + c = y - c : b$ die gesuchte Größe.

§. 17.

Beispiel 1. Sei $c = 718$, $m = 36^0\ 15'$ gegeben, so ist;

$$4\delta^2 = 118182;\quad m = 36{,}25;\quad m^2 = 1314{,}0625.$$

$$3m^2 = 3942{,}1875$$

$$4\delta^2 - 3m^2 = 114239{,}8125$$

$$\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} = 337{,}993.$$

$$\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} - \delta = 166{,}105 = A.$$

Nun ist nach dem Obigen zu setzen:

$$3m : A = 2c : y, \text{ oder hier:}$$

$$108{,}75 : 166105 = 1436 : y, \text{ mithin}$$

$$y = \frac{1436 \cdot 166{,}105}{108{,}75} = 2193{,}35.$$

Ferner findet nun die Proportion statt:

$$2y : y + c = y - c : b, \text{ oder hier:}$$

$$4386{,}7 : 2911{,}35 = 1475{,}35 : b, \text{ mithin:}$$

$$b = \frac{2911{,}35 \cdot 1475{,}35}{4386{,}7} = 979{,}155.$$

Die Rechnung mit Hülfe der trigonometrischen Linien würde dagegen ergeben:

$$\text{tg tang comp } m - 10 = 0{,}1347596$$

$$\log c = 2{,}8561244$$

$$\log b = 2{,}9908840, \text{ und hiernach:}$$

$$b = 979{,}25.$$

Beispiel 2. Sei $c = 432$, $m = 37^0$ gegeben, so wird:

$$4\delta^2 = 118182, \quad m^2 = 1369.$$

$$3m^2 = 4107$$

$$4\delta^2 - 3m^2 = 114075.$$

$$\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} = 337{,}74$$

$$\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} - \delta = 165{,}852 = A,$$

$$\text{wegen } 3m : A = 2c : y$$

$$111 : 165{,}852 = 864 : y$$

$$\log 864 = 2{,}9365137$$

$$\log 165{,}852 = 2{,}2197207$$

$$5{,}1562344$$

$$\log 111 = 2{,}0453230$$

$$\log y = 3{,}1109114 = \log 1290{,}956;$$

ferner wegen $2y : y + o = y - c : b$

$$2581{,}912 : 1722{,}956 = 858{,}956 : a.$$

$$\begin{aligned} \log 858{,}956 &= 2{,}9339709 \\ \log 1722{,}956 &= \underline{3{,}2362742} \\ & 6{,}1702451 \\ \log 2581{,}912 &= \underline{3{,}4119414} \\ \log b &= 2{,}7583037, \text{ mithin} \\ b &= 573{,}167. \end{aligned}$$

Trigonometrische Berechnung würde dagegen ergeben:

$$\begin{aligned} \log tg\, comp\, m - 10 &= 0{,}1228856 \\ \log c &= \underline{2{,}6354837} \\ \log b &= 2{,}7583663, \text{ mithin} \\ b &= 573{,}278. \end{aligned}$$

§. 18.

Aufgabe. Es ist in einem rechtwinklichen Dreiecke nur die Hypothenuse a bekannt und einer der anliegenden Winkel m, welcher jedoch nicht $22\frac{1}{2}^0$ übersteigen mag; es soll die anschließende Cathete b durch Rechnung ermittelt werden.

Auflösung. Wir finden in §. 11, daß:

$$m = \frac{c\delta}{2a + b} \text{ u. s. w } c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$2am + bm = \delta\sqrt{a^2 - b^2}$$

$$4a^2m^2 + 4abm^2 + b^2m^2 = \delta^2a^2 - \delta^2b^2$$

$$b^2(\delta^2 + m^2) + 4abm^2 = a^2(\delta^2 - 4m^2)$$

$$b^2 + \frac{4bam^2}{m^2 + \delta^2} = \frac{a^2(\delta^2 - 4m^2)}{m^2 + \delta^2}$$

$$b = -\frac{2am^2}{m^2 + \delta^2} \pm \sqrt{\frac{4a^2m^2 + a^2(\delta^2 - 4m^2)(m^2 + \delta^2)}{(m^2 + \delta^2)^2}}$$

$$b = \frac{a}{\delta^2 + m^2} \left[-2m^2 \pm \sqrt{4m^4 + m^2\delta^2 + \delta^4 - 4m^4 - 4m^2\delta^2} \right]$$

oder, wenn man abkürzt und nur das allein zu gebrauchende + vor dem Wurzelzeichen beibehält:

$$b = \frac{a}{m^2 + \delta^2} \left[\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - 2m^2 \right].$$

Beispiel. Sei in einem rechtwinklichen Dreiecke die Hypothenuse $a = 370$ Schritt und der anliegende Winkel $m = 16^0$ gegeben; man soll die anstoßende Seite b durch Rechnung finden:

$$\delta^2 = 29545{,}5$$
$$3m^2 = 768$$
$$\delta^2 - 3m^2 = 28777{,}5$$
$$\sqrt{\delta^2 - 3m^3} = 169{,}63$$
$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 29157{,}36144$$
$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - 2m^2 = 28645{,}36144.$$
$$\log 28645{,}36\ldots = 4{,}4570543$$
$$\log 370 = \log.\ a = 2{,}5682017$$
$$7{,}0252560$$
$$\log(\delta^2 + m^2) = 4{,}4742381$$
$$\log b = 2{,}5510179$$
$$b = 355{,}646.$$

Trigonometrisches Verfahren würde dagegen folgendes Resultat ergeben:

$$\log \cos 16^0 = 9{,}9828419 - 10$$
$$\log 370 = 2{,}5682017$$
$$\log b = 2{,}5510436, \text{ mithin}$$
$$b = 355{,}667.$$

§. 19.

Aufgabe. Es ist in einem rechtwinklichen Dreiecke

die größere Cathete b und der kleinere anliegende spitze Winkel $= m$ bekannt; man soll hiernach die kleinere Cathete bestimmen.

Auflösung. In §. 11. war ermittelt, daß:

$m = \frac{c\delta}{2a + b}$, mithin, wenn wir $a = \sqrt{c^2 + b^2}$ setzen,

$$2m\sqrt{b^2 + c^2} + bm = c\delta \text{ und}$$

$$4m^2(b^2 + c^2) = c^2\delta^2 - 2bc\delta m + b^2m^2$$

$$c^2(\delta^2 - 4m^2) - 2bc\delta m = 3b^2m^2$$

$$c = \frac{b\delta m}{\delta^2 - 4m^2} \pm \sqrt{\frac{b^2\delta^2m^2 + 3b^2m^2(\delta^2 - 4m^2)}{(\delta^2 - 4m^2)^2}}$$

Lassen wir sogleich das — vor dem Wurzelzeichen hinweg, so wird nach den nöthigen Verkürzungen:

$c = \frac{b\delta m + \sqrt{4b^2\delta^2m^2 - 12b^2m^4}}{\delta^2 - 4m^2}$, oder endlich

$$c = \frac{bm}{\delta^2 - 4m2}[\delta - 2\sqrt{\delta^2 - 3m^2}].$$

Beispiel. Sei $b = 250$ und $m = 18^0$ gegeben.

Es ist: $\delta^2 = 29545{,}5$

$$3m^2 = 972$$

$$\delta^2 - 3m^2 = 28573{,}5$$

$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 169{,}03$$

$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 338{,}06$$

$$\delta + 2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 509{,}948.$$

$$\log bm = \log 4500 = 3{,}6532125$$

$$\log(\delta + 2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 2{,}7075259$$

$$6{,}3607384$$

$$\log \delta^2 - 4m^2 = \lg 282495 = 4{,}4510108$$

$$1{,}9097276 = \log 81{,}232,$$

mithin $c = 81{,}232$.

Trigonometrische Berechnung würde dagegen ergeben:

$$\log \text{tg } 18^\circ = 9{,}5117760 - 10.$$
$$\log 250 = 2{,}3979400$$
$$\log c = 1{,}9097160, \text{ mithin}$$
$$c = 81{,}23.$$

§. 20.

Aufgabe. Es soll ein jeder vorkommende Winkel ohne Hülfe trigonometrischer Tafeln in Graden und deren Theile ausgedrückt werden.

Auflösung. Die im Vorhergehenden angegebene Verfahrungsweise, die Größe des Winkels, welcher der kleineren Catheten gegenüber liegt, aus den beiden bekannten Cathete abzuleiten, setzt uns in Stand, der hier gegebenen Aufgabe zu genügen.

Man nehme auf den Schenkeln BA und BC des gegebenen Winkels ABC (Fig. 5) die Weiten BD = BF, messe diese, ziehe DF, messe auch diese Größe und fälle nun aus der Spitze B auf letztere eine Senkrechte BG; es entstehen hierdurch die rechtwinklichen Dreiecke DBG und FBG, von denen man die Katheten $DG = GF = \frac{1}{2} DF$ (wegen des gleichschenklichen Dreiecks), kennt und die Senkrechte $BG = \sqrt{DB^2 - DG^2}$ leicht ermitteln kann. Je nachdem nun BG kleiner oder größer als GD gefunden wird, kann man den Winkel GDB oder DBG nach dem Vorhergehenden bestimmen. Im letzteren Falle ist

der gesuchte Winkel ABC = 2DBG;

im ersteren, wenn man GDB bestimmt, wird:

$$ABC = 180^\circ - 2\,GDB,$$

wie dies ohne Schwierigkeit einzusehen ist.

Beispiel 1. Es sei in der gegebenen Figur auf

den

den Schenkeln die Weiten BD = BF = 250 Schritt abgesteckt und die gerade Linie DF = 164 Schritt gefunden worden. Hier ist also:

$$DG = 82 \text{ Schritt, und}$$

$$BG = \sqrt{(250)^2 - (82)^2} = 236{,}17.$$

Setzen wir nun:

$$250 = a;\ 236{,}17 = b;\ 82 = c;\ \angle GDB = m,$$

so ist nach §. 5:

$$m = \frac{c\,\delta}{2a+b}$$

$$\log c = 1{,}9138139$$
$$\log \delta = \underline{2{,}2352469}$$
$$4{,}1490608$$
$$\log(2a+b) = \underline{2{,}8669781}$$
$$\log m = 1{,}2820827 = \log 19{,}1466; \text{ mithin}$$
$$m = 19^0\ 8'\ 47{,}36'' \text{ und}$$
$$\angle ABC = 2m = 38^0\ 17'\ 35{,}72''.$$

Beispiel 2. Sei in einem andern Falle bei gleichen Bedeutungen der Buchstaben BD = BF = 378 Schritt abgesteckt und alsdann die Linie FD = 632 Schritt gefunden worden; dann ist DG = 316 Schritt, und

$$BG = \sqrt{(378)^2 - (316)^2} = 207{,}43.$$

Setzen wir nunmehr, dem Sinne der Buchstaben nach: DG = b = 316; BG = c = 207,43; a = 378 und nunmehr ∠GDB = m als den zu bestimmenden Winkel, so erhalten wir:

$$\log c = 2{,}3168716$$
$$\log \delta = \underline{2{,}2352469}$$
$$4{,}5521185$$
$$\log(2a+b) = \underline{3{,}0301948}$$
$$\log m = 1{,}5219237 = \log 33{,}2601; \text{ mithin}$$

$$m = 33^\circ\ 15'\ 36{,}36''$$ und nunmehr

$$\angle ABC = 180^\circ - 2m = 113^\circ\ 28'\ 47{,}28''.$$

§. 21.

Anwendungen. Da im rechtwinklichen Dreiecke, wenn einer der spitzen Winkel bekannt ist, auch der andere gegeben worden; so ist klar, daß wenn im Früheren aus der kleinsten gegebenen Cathete und dem derselben gegenüber liegenden Winkel die andere Cathete bestimmt werden konnte, es auch möglich wird, aus der gegebenen kleinsten Cathete und dem anliegenden Winkel jene fehlende Größe zu berechnen. Diese Betrachtung kann dem Feldmesser und Soldaten bei Bestimmung von Entfernungen nutzbar werden, wobei er es allemal so einrichten kann, daß der in der Rechnung vorkommende Winkel kleiner als $22\frac{1}{2}^\circ$ sei, wodurch er es erlangt, die weniger zusammengesetzte Formel des §. 15 anwenden zu können.

Aufgabe 1. Es sei (Fig. 6) die Entfernung der Gegenstände A und B zu bestimmen, welche wegen der dazwischen liegenden Terrainhindernisse nicht unmittelbar abgeschritten werden kann.

Auflösung. Man stelle sich in einem der Endpunkte, etwa in B, auf, gehe von dort unter einem rechten Winkel von der Linie AB ab, und zwar nur so weit, daß der Winkel BCA, welchen man im gewählten neuen Standort mißt, größer als $67\frac{1}{2}^\circ$ sei, wodurch man es erlangt, daß der in der Rechnung als m vorkommende Winkel CBA kleiner als $22\frac{1}{2}^\circ$, und welches leicht erhalten wird, indem man sich nur nicht weit vom Punkte B entfernen darf.

Beispiel. Sei die Länge $BC = c = 65$ Schritt abgemessen, und der Winkel bei $c = 70^\circ\ 20'$ gefunden, so ist hier:

$$c = 65;\quad m = 90^\circ - 70^\circ\ 20' = 19^\circ\ 40' = 19,66\ldots$$

alsdann aber, nach §. 15, die gesuchte Entfernung:

$$AB = b = \frac{c}{3m}\left[2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta\right]$$

Wir erhalten demnach:

$$\delta^2 = 29545,5$$
$$3m^2 = 1159,5468$$
$$\delta^2 - 3m^2 = 28385,9532$$
$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 168,48$$
$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 336,96$$
$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta = 165,072$$
$$c\,(2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta) = 10729,68$$
$$b = \frac{c}{3m}\left[2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta\right] = 182,09 = AB.$$

Durch trigonometrische Rechnung würde man dagegen gefunden haben:

$$\log tg\ 70^\circ\ 20' - 10 = 0,4468508$$
$$\log 65 = 1,8129134$$
$$\log b = 2,2597642;\ \text{mithin}$$
$$b = 181,871,$$

so daß also durch die frühere Rechnung die Entfernung AB um 0,119 zu groß gefunden ist.

Aufgabe 2. Es mögen die Gegenstände A und B, deren Entfernung man bestimmen will, so gelegen sein, daß man nach A (Fig. 7) gar nicht, wohl aber nach B gelangen kann, dort aber das Terrain die Beschaffenheit haben, daß man entweder nicht in einer auf AB senkrechten Richtung abgehen könnte, weil das Terrain es nicht erlaubt, oder doch, daß man in jener Richtung der Aussicht

auf A beraubt werde. Man wird hier in einer beliebigen, doch wo möglich solchen Richtung von B abgehen, daß der Winkel ABC größer als $67\frac{1}{2}^0$ sei, diesen Winkel messen und nun in der angenommenen Richtung bis auf einen Punkt C vorschreiten, woselbst eine Senkrechte von A aus eintrifft. Weil nun der anliegende Winkel der größere spitze Winkel des Dreiecks ist, so muß auch die gemessene BC mit dem bisherigen c, der Winkel CAB $= 90^0 - ABC$ mit m und AC mit b zu vergleichen, und letztere nach der vorstehenden Weise zu berechnen sein. Alsdann aber ist es leicht, die gesuchte Entfernung AB mit Hülfe des Pythagorischen Satzes zu ermitteln.

Aufgabe 3. Die Entfernung der Orte A und B (Fig. 8), welche beide unzugänglich und so gelegen sind, daß man sich nicht in der Ferne vor der Linie zwischen beiden stellen kann, soll ausgemittelt werden.

Auflösung. Man wähle einen Standort C in der Verlängerung beider Gegenstände, schreite von hier aus unter einem rechten Winkel ab, doch so, daß der Winkel CDA nicht zu klein werde, und messe sowohl die Winkel $CDA = \beta$ und $CDB = \beta'$, als die Entfernung CD. Man hat alsdann die nöthigen Data zur Berechnung der Linien CB und CA, welche letztere von der ersteren abgezogen, die gesuchte Entfernung giebt.

Beispiel. Es sei $CD = 254 = c$, $\angle CDA = 69^0\ 20'$, $\angle CDB = 78^0\ 10'$ gefunden; alsdann ist nach dem Vorherigen:

$$\delta^2 = 29545{,}5 \qquad m = 90^0 - 69^0\ 20' = 20{,}66$$

$$3m^2 = 1280{,}5$$

$$\delta^2 - 3m^2 = 28265$$

$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 168{,}12$$
$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 336{,}24$$
$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta = 164{,}352$$
$$\log(2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta) = 2{,}2157750$$
$$\log c = \log 254 = \underline{2{,}4048337}$$
$$4{,}6206087$$
$$\log 3m = \underline{1{,}7922516}$$
$$\log b = 2{,}8283571,$$

demnach $AC = b = 673{,}52.$

Ferner ist

$$\delta^2 = 29545{,}5 \quad m' = 90^0 - 78^0\,10' = 11{,}833$$
$$3m^2 = \underline{420{,}06}$$
$$\delta^2 - 3m^2 = 29125{,}44$$
$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 170{,}66$$
$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 341{,}32$$
$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - \delta = 169{,}432 \quad \text{und nun}$$
$$\log(2\sqrt{\delta^2 - m^2} - \delta) = 2{,}2289954$$
$$\log c - \log 254 = \underline{2{,}4048337}$$
$$4{,}6338291$$
$$\log 3m' = \underline{1{,}5502161}$$
$$\log b' = 3{,}0836130; \text{ mithin}$$
$$CB = b' = 1212{,}31.$$

Somit aber die gesuchte Entfernung:

$$AB = CB - CA = 538{,}79.$$

Die Rechnung auf trigonometrischem Wege würde hiebei 538,95, mithin einen Unterschied von 0,16 geben.

§. 22.

Da sich ein jedes schiefwinkliche Dreieck entweder in zwei rechtwinkliche durch eine aus dem Winkelpunkt auf

die Grundlinie gefällte Senkrechte zerlegen läßt, oder, wenn jene Senkrechte nur die Verlängerung der Grundlinien trifft, als den Unterschied zweier rechtwinklichen Dreiecke betrachten läßt; so leuchtet schon hieraus ein, daß die bisherigen Formeln auch zu Berechnung der in gegebenen schiefwinklichen Dreiecken fehlenden Stücke führen werden, wie dies denn nun in einzelnen Fällen näher gezeigt werden soll.

§. 23.

Aufgabe. Es sind aus einem spitzwinklichen Dreiecke ABC (Fig. 9) drei dasselbe bestimmenden Stücke bekannt; man sucht die fehlenden.

Erster Fall. Es seien die Seiten AB und BC mit m und n bekannt, so wie der eingeschlossene Winkel o.

Auflösung. Man fälle aus A die Senkrechte AD auf die BC, so läßt sich AB mit dem a in §. 18 vergleichen und hiernach BD bestimmen, so wie nachmals AD. Nunmehr ist auch DC = BC — BD bekannt, und so auch im Dreieck ADC die Seite AC zu ermitteln. Aus diesem Dreiecke ergiebt sich nun nach §. 11 oder 13, welche Wahl durch die Vorschrift des §. 9 bedingt wird, der Winkel bei C, womit alle Stücke des Dreiecks gegeben sind.

Zweiter Fall. Es mögen die Seiten AB und BC nebst dem anliegenden Winkel bei C gegeben sein.

Auflösung. Man fälle aus B die Senkrechte BF (Fig. 9 B) auf AC, berechne im Dreiecke BFC die Seiten FB und, nach dem Pythagorischen Satze, CF; so wie alsdann im Dreiecke ABF, nach eben dem

letzt erwähnten Satze, das Stück AF, alsdann auch den Winkel bei A.

Dritter Fall. Es mögen (Fig. 9 C) di' Seite AB nebst beiden anliegenden Winkeln gegeben sein.

Auflösung. Das Verfahren ändert sich wenig von dem früheren. Es sind hier sämmtliche Winkel bekannt. Man fälle die Senkrechte aus dem kleinsten, der bekannten Seiten anliegenden Winkel, berechne dann, nach §. 18 im Dreieck ABG, die Senkrechte und das Stück BG, indem man den Winkel BAG $=90^0-$ABG kennt, und nun bestimme man, nach §. 19, im Dreiecke AGC die Cathete GC und somit auch AC.

Beispiel 1. Sei in einem spitzwinklichen Dreiecke gegeben: die Seite AB (Fig. 9) $=516$; BC$=205$, der eingeschlossene Winkel ABC $=71^0$; alsdann ist, wenn man die Senkrechte AD fällt: $\angle$BAD $=90^0-71^0=19^0$ und nunmehr, wenn wir setzen:

AB $=a=516$, $\angle$BAD $=m=19^0$ und AD $=b$, nach §. 18:

$$b = \frac{a}{\delta^2+m^2}\left[\delta\sqrt{\delta^2-3m^2}-2m^2\right] \text{ und hier}$$

$$\delta^2 = 29545{,}5$$
$$3m^2 = 1083$$
$$\delta^2-3m^2 = 28462{,}5$$
$$\sqrt{\delta^2-3m^2} = 168{,}7$$
$$\delta\sqrt{\delta^2-3m^2} = 28997{,}5$$
$$\delta\sqrt{\delta^2-3m^2}-m^2 = 28275{,}5 \text{ und nun}$$
$$\log 28275{,}5 = 4.4514103$$
$$\log a = \log 516 = 2.7126497$$
$$7{,}1640600$$
$$\log \delta^2+m^2 = \log 29906{,}5 = 4{,}4757656$$
$$\log b = 2.6882944; \text{ mithin}$$

$$AD = b = 487{,}86.$$

Ferner ist:

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{(516)^2 - (487{,}86)^2} = 167{,}9.$$

Im rechtwinklichen Dreiecke ADC ist ferner:

$$DC = BC - BD = 205 - 167{,}9 = 37{,}1$$ und

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{(487{,}86)^2 + (37{,}1)^2} = 489{,}2.$$

Setzen wir nun $AD = b$, $AC = a$ und $DC = c$; so ist nach §. 5:

$$\angle DAC = m = \frac{c}{2a + b} \cdot \delta.$$ Hier ist:

$$\log c = \log 37{,}1 = 1{,}5693739$$
$$\log \delta = 2{,}2352469$$
$$3{,}8046208$$
$$\log (2a + b) = \lg 1466{,}26 = 3{,}1662110$$
$$\log m = 0{,}6384098 = \lg 4{,}3492$$ und

$m = 4^\circ\ 20'\ 57{,}12''$; demnach aber:

$$\angle BAC = 19 + m = 23^\circ\ 20'\ 57{,}12''$$ und

$$\angle BCA = 180^\circ - (ABC + BAC) = 85^\circ\ 39'\ 2{,}48''.$$

Beispiel 2. Sei in einem spitzwinklichen Dreiecke FBC (Fig. 9 B) gegeben:

$$AB = 722,\quad BC = 416 \text{ und } \angle ACB = 68^\circ\ 15'.$$

Wird aus B auf die AC eine Senkrechte BF gestellt, so ist im Δ CBF:

$$\angle CBF = 90^\circ - 68^\circ\ 15' = 21^\circ\ 45' = 21{,}75 = m$$ und

$$BC = a = 416.$$

Wir finden alsdann, nach §. 18:

$$BF = b = \frac{a}{\delta^2 + m^2} \left(\delta \sqrt{\delta^2 - 3m^2} - 2m^2\right).$$

und zwar: $\delta^2 = 29545{,}5$

$$3m^2 = 1419{,}48$$
$$\delta^2 - 3m^2 = 28126{,}02$$

$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 167,7$$

$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 28825,6176$$

$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - 2m^2 = 27879,2926$$ und nun ferner:

$$\log 27879,2926 = 4,4452820$$

$$\log a = \log 416 = \underline{2,6190933}$$

$$7,0643753$$

$$\log \delta^2 + m^2 = \log 30018,66 = \underline{4,4773913}$$

$$\log b = 2,5869640;$$ mithin

$$b = BF = 386,335.$$

Ferner ist in diesem Dreiecke:

$$CF = \sqrt{BC^2 - BF^2} = \sqrt{173056 + 149289,\ldots}$$

$$CF = 154,16.$$

Im Dreiecke ABF ist ferner:

$$AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{521284 - 149289}$$

$$FA = 609,9.$$

In diesem Dreiecke ist nun $\angle$ FAB der kleinere; da aber $\frac{386}{610} > 0,4$, so ist auch derselbe größer als $22\frac{1}{2}^0$, und muß daher nach der §. 13. gegebenen Formel berechnet werden. Dort war:

$$m = \frac{2c\delta}{a + b + 2\sqrt{2a(a+b)}}.$$

Setzen wir hier:

$$b = 610;\quad c = 386,335;\quad a = 722,$$ so ist:

$$a + b = 1332$$

$$2a(a + b) = 1923408$$

$$\sqrt{2a(a+b)} = 1386,8$$

$$2\sqrt{2a(a+b)} = 2773,6$$

$$a + b + 2\sqrt{2a(a+b)} = 4105,6,$$ und demnach

$$\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log \delta = 2{,}2352469$$
$$\log c = \log 610 = \underline{2{,}5869641}$$
$$5{,}1232410$$
$$\log 4105{,}6 = \underline{3{,}6133766}$$
$$\log m = 1{,}5098644 = \log 32{,}3492;$$ mithin
$$m = \angle BAF = 32^\circ\ 20'\ 55{,}12'',$$
$\angle ABF = 90 - BAF = 57^\circ\ 39'\ 4{,}48''$ und somit endlich
$$\angle ABC = ABF + FBC = 79^\circ\ 24'\ 4{,}48''.$$

Beispiel 3. Im spitzwinklichen Dreiecke ABC (Fig. 9 C) sei gegeben:
die Seite $AB = 417$, die Winkel $ABC = 69^\circ\ 24'$, und
$$BAC = 42^\circ\ 17';$$
mithin der dritte Winkel $ACB = 68^\circ\ 19'$.
Man fälle aus A die Senkrechte AG auf die BC, so ist im Dreiecke BAG
$$\angle BAG = 90^\circ - ABC = 20^\circ\ 36' = m = 20{,}6,$$
und nach §. 17:
$$\delta^2 = 29545{,}5$$
$$3m^2 = \underline{1267{,}08}$$
$$\delta^2 - 3m^2 = 28278{,}42$$
$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 168{,}16$$
$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 28904{,}686$$
$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - 2m^2 = 28054{,}966$$ und nun
$$\log 28054{,}966 = 4{,}4480872$$
$$\log a = \log 417 = \underline{2{,}6201361}$$
$$7{,}0682233$$
$$\log \delta^2 + m^2 = \log 29967{,}86 = \underline{4{,}4766558}$$
$$\log b = 2{,}5915675,$$
und demnach $AG = b = 390{,}4$.

Ferner ist in diesem Dreiecke:

$$BG = \sqrt{AB^2 - AG^2} = \sqrt{173889 - 152412{,}16}$$

$$BG = 146{,}5.$$

Im Dreiecke AGC ist ferner:

$$\angle GAC = 42^0\,17' - 20^0\,36' = 21^0\,41' = 21{,}68 = m,$$

und, da hier die größere Cathete AG = b bekannt ist, die kleinere CG zu suchen. Es ist aber hiefür, nach §. 19:

$$c = \frac{bm}{\delta^2 - 4m^2}\left[\delta + 2\sqrt{\delta^2 - 3m^2}\right] \text{ und hier:}$$

$$\delta^2 = 29545{,}5$$

$$3m^2 = 1439{,}7672$$

$$\delta^2 - 3m^2 = 28105{,}7328$$

$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 167{,}64$$

$$2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 335{,}28$$

$$\delta + 2\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 507{,}168.$$

Ferner ist: $\log b = \log 390{,}4 = 2{,}5915675$

$$\log m = 1{,}3360593$$

$$\log 507{,}168 = 2{,}7051510$$

$$6{,}6327778$$

$$\log \delta^2 - 4m^2 = \log 27625{,}81 = 4{,}4413151$$

$$\log c = 2{,}1914627, \text{ mithin}$$

$$GC = c = 155{,}4 \text{ und demnach}$$

$$BC = BG + GC = 301{,}4.$$

Endlich wird auch:

$$AC = \sqrt{AG^2 + GC^2} = \sqrt{152412{,}16 + 24149{,}16}$$

$$AC = 420{,}19.$$

§. 24.

Aufgabe. In einem stumpfwinklichen Dreiecke sind drei dasselbe bestimmende Stücke bekannt; es sollen

die fehlenden ohne Hülfe trigonometrischer Linien gefunden werden.

Erster Fall. Es sind im Dreiecke ABC (Fig. 10. A) der stumpfe Winkel nebst beiden einschließenden Seiten gegeben.

Auflösung. Man verlängere einen Schenkel BC des stumpfen Winkels bis D, wo derselbe von einer aus dem gegenüber liegenden Winkelpunkt gefällten Senkrechten durchschnitten wird. Man kennt nun im entstandenen rechtwinklichen Dreieck ACD die Hypothenuse, und kann, nach §. 18 und mit Hülfe des Pythagorischen Satzes, die fehlenden Catheten entwickeln, da auch $\angle ACD = 180^\circ - ACB$ und $CAD = 90^\circ - ACD$ gegeben sind. Nachdem diese Arbeit vollendet, kennt man im Δ ABD beide Catheten, mithin auch die Hypothenuse, und es ergiebt sich leicht nach §. 5 rc. einer der beiden fehlenden, und somit auch der dritte Winkel des Dreiecks. — Sei in demselben Dreiecke ABC nicht der stumpfe, sondern ein spitzer Winkel und die beiden ihn einschließenden Seiten gegeben, so wird man die Senkrechte CF auf BA fällen, und nun, wie im §. 23. 1ster Fall, verfahren können.

Zweiter Fall. Sei der stumpfe Winkel CBA (Fig. 10. B) und die Seiten CA, AB gegeben, d. h. zwei Seiten und der anliegende stumpfe Winkel.

Auflösung. Mann kennt, wenn die Senkrechte AD gefällt wird, im Dreiecke ACD die beiden nöthigen Winkel und die Hypothenuse, woraus sich die beiden Catheten ergeben. Alsdann kennt man im Dreiecke BAD die Hypothenuse AB und eine Cathete AD, woraus sich

die Cathete BD und demnach auch BC = BD — CD berechnen läßt, so wie denn auch die Winkel zu finden sind.

Wären dagegen zwei Seiten AC und AB und der anliegende spitze Winkel ACB gegeben, so wird die Construction wie vorhin bleiben, zuvörderst aber das größere Dreieck CAD mittelst der bekannten Hypothenuse und dem Winkel berechnet werden, alsdann aber aus den sich hieraus ergebenden Datis im kleinen Dreiecke ABD die Cathete BD zu berechnen möglich werden, wonach sich denn das Fehlende wie vorhin ergiebt.

Dritter Fall. Es sind zwei, mithin alle Winkel im Dreiecke und eine Seite desselben gegeben.

Auflösung. Ist (Fig. 10. B) im angegebenen Falle die, dem stumpfen Winkel gegenüber liegende Seite AC bekannt, so läßt sich im Dreiecke ACD hiernach das Fehlende berechnen, und da hiedurch im Dreiecke ABD die Cathete AD und die Winkel bekannt werden, so wird es nach §. 17 oder 19 möglich werden, die AB und BD zu finden, womit das Verlangte erfüllt wird.

Ist aber eine Seite gegeben, welche ein Schenkel des stumpfen Winkels ist, so wird nur die Folge der Operationen verändert, welche übrigens dieselben bleiben wie vorhin.

Beispiel 1. Sei im stumpfwinklichen Dreiecke ABC gegeben (Fig. 11. A):

$$BC = 219; \quad AC = 178; \quad \angle BCA = 105^\circ\ 12'.$$

Es ist dann $\angle ACD = 74^\circ\ 48'$ und

$$\angle CAD = 90 - ACD = 15^\circ\ 12' = 15{,}2 = m,$$

und nach §. 18:

$$\delta^2 = 29545,5$$
$$3m^2 = 693,12$$
$$\delta^2 - 3m^2 = 28852,38$$
$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 169,85$$
$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 29195,1868$$
$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^4} - 2m^2 = 28733,1 \text{ und nun}$$
$$\log 28733,1 = 4,4583825$$
$$\log 178 = \log a = 2,2504200$$
$$6,7088025$$
$$\log(\delta^2 + m^2) = \log 29776,54 = 4,4738743$$
$$\log c = 2,2349282, \text{ daher}$$
$$AD = c = 171,763.$$

Ferner ist in diesem Dreiecke:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{31684 - 29502,52\ldots}$$
$$CD = 46,7.$$

Wir erhalten nunmehr:

$$BD = BC + CD = 265,7, \text{ und endlich auch}$$
$$AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{70596,49 + 31684}$$
$$AB = 319,8.$$

Benennen wir nun, um die fehlenden Winkel zu bestimmen, nachdem wir betrachten, daß $\frac{171}{265} > 0,4$ ist, und demnach die Formel des §. 13. anzuwenden haben: $a = 319,8$; $b = 265,7$; $c = 171,763$ und $\angle ABC = m$, so wird:

$$a + b = 585,5$$
$$2a(a+b) = 374485,8$$
$$\sqrt{2a(a+b)} = 611,95$$
$$2\sqrt{2a(a+b)} = 1223,9$$
$$a + b + 2\sqrt{2a(a+b)} = 1809,4, \text{ und dann}$$

$$\begin{aligned}
\log c &= 2{,}2349282 \\
\log \delta &= 2{,}2352469 \\
\log 2 &= \underline{0{,}3010300} \\
&\ 4{,}7712051 \\
\log 1809{,}4 &= \underline{3{,}2575346}
\end{aligned}$$

$\log m = 1{,}5136705 = \log 32{,}634$ und demnach

$\angle ABC = m = 32^0\ 38'\ 2{,}4''$, so wie

$\angle BAG = 180^0 - ABC + BCA = 42^0\ 9'\ 57{,}6''$.

Beispiel 2. Sei (Fig. 10. B) im stumpfwinklichen Dreiecke ABC gegeben:

AC = 420; AB = 260 und der anliegende spitze Winkel

$$ACB = 18^0\ 24';$$

alsdann ist, wenn wir die Senkrechte AD fällen, im Dreiecke ACD, $\angle m = 18{,}4$ und $a = 420$ bekannt, woraus nach §. 18 folgt für $CD = b$:

$$\begin{aligned}
\delta^2 &= 29545{,}5 \\
3m^2 &= \underline{1015{,}68} \\
\delta^2 - 3m^2 &= 28529{,}82 \\
\sqrt{\delta^2 - 3m^2} &= 168{,}9 \\
\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} &= 29040{,}8832 \\
\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - 2m^2 &= 28363{,}7632 \text{ und nun ferner:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\log 28363{,}7652 &= 4{,}4527639 \\
\log a = \log 420 &= \underline{2{,}6232493} \\
&\ 7{,}0760132 \\
\log(\delta^2 + m^2) = \log 29884{,}06 &= \underline{4{,}4754396} \\
&\ 2{,}6005706 = \log b,
\end{aligned}$$

mithin $CD = 398{,}633$.

Ferner ist in dem Dreiecke:

$$AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{176400 - 158908{,}5}$$

$$AD = 132{,}25.$$

Im Dreiecke ABD wird nun

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{67600 - 17492{,}5}$$

$$BD = 223{,}84, \text{ mithin}$$

$$BC = CD - BD = 698{,}633 - 223{,}84 = 174{,}793.$$

Im Dreiecke ABD ist nunmehr der Winkel ABD, als der kleineren Cathete c gegenüber liegend, $= m$ zu setzen, und da $\frac{c}{b} = \frac{132}{223} > 0{,}4$, nach §. 13. zu berechnen. Dann ist:

$$a = AB = 260; \quad b = BD = 223{,}84; \quad c = AD = 132{,}25$$

und

$$a + b = 483{,}84$$

$$2a(a + b) = 251596{,}80$$

$$\sqrt{2a(a + b)} = 501{,}59$$

$$2\sqrt{2a(a + b)} = 1003{,}18$$

$$a + b + 2\sqrt{2a(a+b)} = 1487{,}02 \text{ und ferner:}$$

$$\log 2 = 0{,}3010300$$

$$\log c = 2{,}1213957$$

$$\log \delta = 2{,}2352469$$

$$4{,}6576726$$

$$\log 1487{,}02 = 3{,}1723168$$

$$\log m = 1{,}4853558, \text{ mithin}$$

$$\angle ABD = 30^\circ\ 34'\ 27{,}12'', \text{ alsdann aber}$$

$$\angle ABC = 180^\circ - ABD = 149^\circ\ 25'\ 32{,}88'' \text{ und}$$

$$\angle BAC = 180^\circ - (ABC + ACB) = 12^\circ\ 10'\ 27{,}12''.$$

Beispiel 3. Im Dreiecke ABC (Fig. 10. B) sei gegeben:

die Seite $AB = 292$, und die Winkel $CBA = 111^\circ\ 12'$

$ACB = 35^\circ\ 20'$;

mithin $CAB = 33^\circ\ 28'$

und, wenn man die Senkrechte AD fällt, wird im Dreiecke ABD, der $\angle ABD = 68^\circ\ 48'$, so wie

$\angle BAD$

$\angle BAD = 90^0 - ABD = 21^0\ 12' = m$

Dann ist im Dreiecke ABD, nach §. 18:

$$A\ B = a = 292 \text{ und } m = 21{,}2.$$

$$\delta^2 = 29545{,}5$$

$$3m^2 = 1348{,}32$$

$$\delta^2 - 3m^2 = 28197{,}18$$

$$\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 167{,}919$$

$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} = 28863{,}261072$$

$$\delta\sqrt{\delta^2 - 3m^2} - 2m^2 = 27964{,}081072.$$

$$\log 27964{,}081072 = 4{,}4466053$$

$$\log a = \log 292 = 2{,}4653829$$

$$6{,}9119882$$

$$\log(m^2 + \delta^2) = \log 29994{,}942 = 4{,}4770481$$

$$\log b = 2{,}4349401; \text{ mithin}$$

$$AD = b = 272{,}233 \text{ und}$$

$$BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{85269 - 74110{,}806289}$$

$$BD = 105{,}608.$$

Setzen wir nun im Dreiecke ACD die Seite AD=c und Winkel ACD=35° 20′=m; so ist die Cathete CD=b nach §. 16. zu berechnen, woselbst wir fanden, daß, wenn $\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} - \delta = A$ gesetzt wird:

$$3a : A = 2c : y \text{ und}$$

$$2y : y + c = y - c : b \text{ ist,}$$

wodurch wir die verlangte Größe bestimmen. Es ist nämlich:

$$4\delta^2 = 118182$$

$$3m^2 = 3744{,}6267$$

$$4\delta^2 - 3m^2 = 114437{,}3733$$

$$\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} = 338{,}285$$

$\sqrt{4\delta^2 - 3m^2} - \delta = 166{,}397 = A$; nunmehr wegen

$$3a : A = 2c : y, \text{ oder hier:}$$

$$105{,}99 : 166{,}397 = 544{,}466 : y,$$

$$\text{mithin } \frac{166{,}397 \cdot 544{,}466}{105{,}99} = y = 854{,}774.$$

Nunmehr ist wegen:

$$2y : y + c = y - c : b, \text{ oder hier:}$$

$$1709{,}548 : 1127{,}007 = 582{,}541 : b, \text{ daher}$$

$$\frac{582{,}541 \cdot 1127{,}007}{1709{,}548} = b = 384{,}038 = CD.$$

Mithin die Dreiecksseite $CB = BD - CD = 278{,}43$, und endlich

$$AC = \sqrt{CD^2 + AD^2} = \sqrt{147485{,}185444 + 74110{,}806289}$$

$$AC = 470{,}739.$$

§. 25.

Zur Erleichterung der Arbeiten kann es in manchen Fällen sehr ersprießlich sein, die Vielfachen der sich in allen Formeln findenden Zahl δ und des δ^2 zu kennen. Man hat zu diesem Zweck die untenstehende Tafel entworfen und wird noch durch ein Beispiel die Anwendung derselben zeigen.

Tafel

der 1- bis 9fachen Produkte von δ und δ^2.

Veränderlicher Faktor	δ	δ^2.
1	171,888	29545,5
2	343,776	59091,0
3	515,664	88636,5
4	687,552	118182,0
5	859,440	147727,5
6	1031,328	177273,0
7	1203,216	206818,5
8	1375,104	236364,0
9	1546,992	265909,5

Anwendung.

Wenn wir in §. 13, Beispiel 1, den Zähler des Bruchs für m mit 2. cδ angegeben finden, und dort c=153 angenommen worden, werden wir mit Hülfe dieser Tafel auf nachstehende Art verfahren:

$$c - 150 = 100 + 50 + 3; \text{ mithin}$$

$$c.\delta = 100\delta + 50\delta + 3.\delta, \text{ d. h.}$$

$$c.\delta = 1.\delta + 100 + 5.\delta + 10 + 3.\delta, \text{ oder hier:}$$

$$1.\delta \times 100 = 17188{,}8$$

$$5.\delta \times 10 = 8594{,}5$$

$$3.\delta = 515{,}664$$

$$153.\delta = 26298{,}864,$$

und da der Zähler die Multiplikation mit 2 verlangt: 2. 153. δ=52597 . 738, wie am erwähnten Orte mit Weglassung der beiden letzten Stellen zu ersehen ist.

Gedruckt bei Johann Friedrich Stärcke.

Berichtigungen.

Seite	12,	Zeile	5 v. u.	fehlt	c		
—	14,	—	3 v. o.	statt	leichtere	l. m.	leichterer
—	16,	—	13 v. o.	—	vor=	l. m.	ver=
—	17,	—	5 v. u. 5. v. o. und Z. 2 v u.	statt	Null	l. m.	Stell
—	24,	—	13 v. o.	statt	Agat	l. m.	Achat
—	25,	—	2 v. u.	—	die	l. m.	der
—	26,	—	9 und 10 v. u.	statt	die	l. m.	der
—	39,	—	12 v. u.	statt	g	l. m.	q
—	=	—	4 v. u.	—	C	l. m.	c
—	40,	—	2 v. u.	ist	kann zu streichen		
—	43,	—	7 v. u.	statt	0,01″	l. m.	0,01‴
—	47,	—	3 v. o.	—	8 mit 9	l. m.	8 mit 9′
—	=	—	8 v. o.	—	4. 4	l. m.	4. 4′
—	=	—	9 v. o.	—	3. 4	l. m.	3. 4′
					4. 4	l. m.	4. 4′
—	52,	—	1 v. o.	—	$\overline{=}$	l. m.	=
—	=	—	2 v. u.	—	sei	l. m.	soll
—	=	—	1 v. u.	—	worden	l. m.	werden
—	62,	—	16 v. o.	—	die	l. m.	der
—	73,	—	7 und 8 v. u.	statt	CG	l. m.	C′G′
—	74,	—	5 und 6 v. o.	statt	Ebene	l. m.	Ebenen
—	80,	—	3 v. o.	statt	784,6	l. m.	78,46
—	=	—	13 v. o.	—	53,70	— —	53,79
—	81,	—	5 v. o.	—	100,43	— —	100,48
—	82,	—	1 v. u.	—	113,49	— —	143,49
—	84,	—	4 v. u.	—	213,21	— —	203,21
—	85,	—	8 v. o.	—	178,65	— —	178,66
—	88,	—	3 v. o.	—	375,64	— —	375,65
—	=	—	11 v. o.	—	285,14	— —	285,13
—	=	—	1 v. u.	—	286,20	— —	288,20
—	89,	—	5 v. o.	—	280,10	— —	280,11
—	=	—	10 v. o.	—	280,80	— —	280,81
—	=	—	4 v. u.	—	291,95	— —	291,96
—	92,	—	16 v. o.	—	400,43	— —	400,48
—	=	—	13 v. u.	—	395,10	— —	385,10
—	=	—	11 v. u.	—	395,37	— —	385,37
—	=	—	3 v. u.	—	386,48	— —	386,44
—	93,	—	9 v. o.	—	571,37	— —	371,37

Seite	93	Zeile	15 v. o.	statt	403,34	l. m.	404,34
—	„	—	15 v. u.	—	380,84	— —	380,80
—	„	—	11 v. u.	—	401,41	— —	405,41
—	95,	—	13 v. u.	—	428,94	— —	428,93
—	„	—	11 v. u.	—	444,81	— —	444,80
—	96	—	4 v. o.	—	461,81	— —	461,88
—	„	—	13 v. o.	—	486,01	— —	486,08
—	„	—	14 v. o.	—	486,28	— —	486,21
—	„	—	10 v. u.	—	464,40	— —	464,46
—	„	—	4 v. u.	—	480,61	— —	480,60
—	„	—	1 v. u.	—	490,99	— —	480,99
—	98,	—	14 v. u.	—	517,14	— —	517,15
—	„	—	13 v. u.	—	502,27	— —	502,26
—	„	—	10 v. u.	—	525,11	— —	525,10
—	„	—	7 v. u.	—	550,24	— —	540,24
—	104,	—	11 v. o.	—	730,22	— —	630,22
—	„	—	4 v. u.	—	665,59	— —	665,56
—	106,	—	12 v. u.	—	732,87	— —	702,87
—	„	—	7 v. u.	—	679,16	— —	678,16
—	107,	—	15 v. u.	—	686,88	— —	686,87
—	112,	—	4 v. u.	—	ac''	l. m.	ac^{n}
—	113,	—	3 v. o.	—	ac''	l. m.	ac^{n}
—	„	—	5 v. o.	—	$c''ab$	l. m.	$c^{n}ab$
—	„	—	10 v. o.	—	b	l. m.	6
—	128,	—	11 v u.	—	Anfangs	l. m.	Umfangs
—	134,	—	13 v. v.	—	$\angle cda'$	l. m	$\angle cda$
—	135,	—	4 v. u.	—	bfhk	l. m.	bflhk
—	137,	—	12 v. u.	—	yxX'	l. m	yxX
—	„	—	9 v. u.	—	X'	l. m.	X
—	138,	—	8 v. o.	—	af'	l. m.	af''
—	142,	—	1 v. u.	—	cx	l. m.	cm.
—	145,	—	12 v. u.	—	c	l. m.	C.
—	150,	—	2 v. u.	—	xaC	l. m.	xcC
—	151,	--	3 v. o.	—	x'	l. m.	x
—	152,	—	14 v. u.	—	im	l. m.	am
—	153,	—	16 v. o.	—	q	l. m.	n
—	158,	—	4 v. o.	—	$=cg$	l. m.	$=ag$,
					$=ah$	l. m.	$=ch$
—	162,	—	6 v. o.	—	$\angle abX$	l. m.	$\angle abx$
—	163,	—	6 v. u.	—	$\angle a'b'$	l. m.	$a'b'$
—	163,	—	11 v. u.	—	$a'x'c'$	l m.	$\angle axc$
—	164,	—	6 v. u.	—	$a'b'c'$	l. m.	$a'bc$

Seite 166,	Zeile 13 u. 2. v. u.	ist zu lesen		a, b, r; b, c, p; a, c, q
— 170,	— 2 v. o.	statt		letzter l. m. letztere
— 171,	— 2 v. u.	—		pqr l. m. pqr
— 173,	— 1 v. o.	—		b l. m. bB
— 177,	— 10 v. u.	—		s l. m. u
— 185,	— 7 v. o.	—		messen l. m. messer
— 201,	— 5 v. o.	—		AGCB l. m. HGEB
— „	— 8 v. o.	—		Sehne BC l. m. Sehne BG
— 202,	— 6 v. u.	—		$\frac{2 \cos. \frac{1}{2}\alpha}{2 + \cos. 3\alpha}$ l. m. $\frac{3 \cos. \frac{1}{2}\alpha}{2 + \cos. \alpha.}$
— 208,	— 6 v. o.	—		nur l. m. um
— 217,	— 13 v. o.	—		29515,5 l. m. 29545,5
— 225,	— 15 v. o.	—		$19^0 8' 47,36''$ l. m. $19^0 8' 47,76''$
— 226,	— 7 u. 10 v. o.	statt		kleinsten l. m. kleineren
— 227,	— 2 v. o.	statt		c. l. m. C.
— „	— 9 v. o.	—		28385,9532 l. m. 18385,9532
— 231,	— 2 v. u.	—		$\log \delta^2 + m^2$ l. m. $\log (\delta^2 + m^2)$
— 232,	— 11 v. u.	—		FBC l. m. ABC
— 233,	— 7 v. o.	—		$\log \delta^2 + m^2$ l. m. $\log (\delta^2 + m^2)$
— 234,	— 7 v. o.	—		$32^0 20' 55,12''$ l. m. $32^0 20' 57,12''$
— „	— 8 v. o.	—		$57^0 39' 4,48''$ l. m. $57^0 39' 2,48''$
— „	— 9 v. o.	—		$79^0 24' 4,48''$ l. m. $79^0 24' 2,48''$
— „	— 3 v. u.	—		$\log \delta^2 + m^2$ l. m. $\log (\delta^2 + m^2)$
— 235,	— 10 v. u.	—		$\log \delta^2 - 4m^2$ l. m. $\log (\delta^2 - 3m^2)$
— „	— 7 v. u.	—		301,4 l. m. 301,9
— 237,	— 1 v. o.	—		BC=BD—CD l. m. BC=CD—BD
— „	— 5 v. u.	—		Fig. 11. l. m. Fig. 10.
— „	— 12 v. u.	—		BD l. m. BC
— 239,	— 9 v. u.	—		lg 28363,7652 l. m. lg 28363,7632
— 240,	— 4 v. o.	—		698,633 l. m. 398,633
— „	— 11 v. u.	—		14853558 l. m. 1,4853558

Die Verlagshandlung, welche es sich zur Pflicht macht, für besondere Correctheit jedes Buchs, das sie dem Druck übergiebt, zu sorgen, glaubte hinlängliche Anstalt getroffen zu haben, damit auch dieses Werk möglichst correct erscheine; da indessen ihre Erwartungen in dieser Hinsicht nicht erfüllt worden sind, so bleibt ihr nichts übrig, als, die Druckfehler Denen, die dieses Buch gebrauchen, zur gefälligen Berichtigung anzuzeigen, und um Entschuldigung deshalb zu bitten.

Mathematische Bücher,
welche
in demselben Verlage erschienen sind.

Von Meier Hirsch:

Sammlung von Beispielen, Formeln und Aufgaben aus der Buchstabenrechnung und Algebra. Dritte Auflage . . . . 1 Rthlr. 8 Gr.

Als Fortsetzung dieses Buchs:

Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. . . . 1 Rthlr. 16 Gr.

Ferner gehört dazu:

Auflösungen der in Meier Hirsch's Sammlung von Beispielen ꝛc. enthaltenen Gleschungen und Aufgaben von. S. Sachs. Dritte Auflage. 1 Rthlr. 16 Gr.

Handbuch der allgemeinen Arithmetik, besonders in Beziehung auf die: „Sammlung von Beispielen ꝛc. von Meier Hirsch." Von P. R. C. Egen. 2 Bände, nämlich:

Bd. 1. Buchstabenrechnung. gr. 8. 2 Rthlr.
— 2. Algebra. gr. 8. . . . 2 Rthlr.

Sammlung geometrischer Aufgaben. 2 Bände mit Kupfern. . . . . . . 3 Rthlr. 8 Gr.

Integraltafeln, oder Sammlung von Integralformeln. 4. . . . . 3 Rthlr.

Lacroix Elementarbücher, a. d. Französ. übersetzt:

Anfangsgründe der Arithmetik, übersetzt von E. M. Hahn. . . . . 1 Rthlr.

Anfangsgründe der Algebra, neu übersetzt v. J. P. Gruson. . . . . . . 1 Rthlr. 8 Gr.

Derselben Bd. 2, oder weitere Ausführung rc. übersetzt von E. M. Hahn. . . 1 Rthlr. 16 Gr.

Anfangsgründe der ebenen und sphärischen Trigonometrie und der höhern Geometrie, übersetzt von E. M. Hahn. . . . 1 Rthlr. 8 Gr.

Weitere Ausführung des vorigen, oder: Sammlung verschiedener Aufgaben der Geometrie, aufgelöset und bewiesen durch die algebraische Analysis, von L. Puissant, übersetzt von E. M. Hahn. . 16 Gr.

Anfangsgründe der Geometrie. Nebst einer Abhandlung über die in diesen Anfangsgründen zu befolgende Ordnung, und über die Methode in den math. Wissenschaften, übersetzt von E. M. Hahn. 1 Rthlr. 16 Gr.

Weitere Ausführung des vorigen, oder: Versuch einer Geometrie über die ebenen und krummen Oberflächen, nebst Anfangsgründen der Perspektive, übersetzt von E. M. Hahn. . . . 1 Rthlr. 4 Gr.

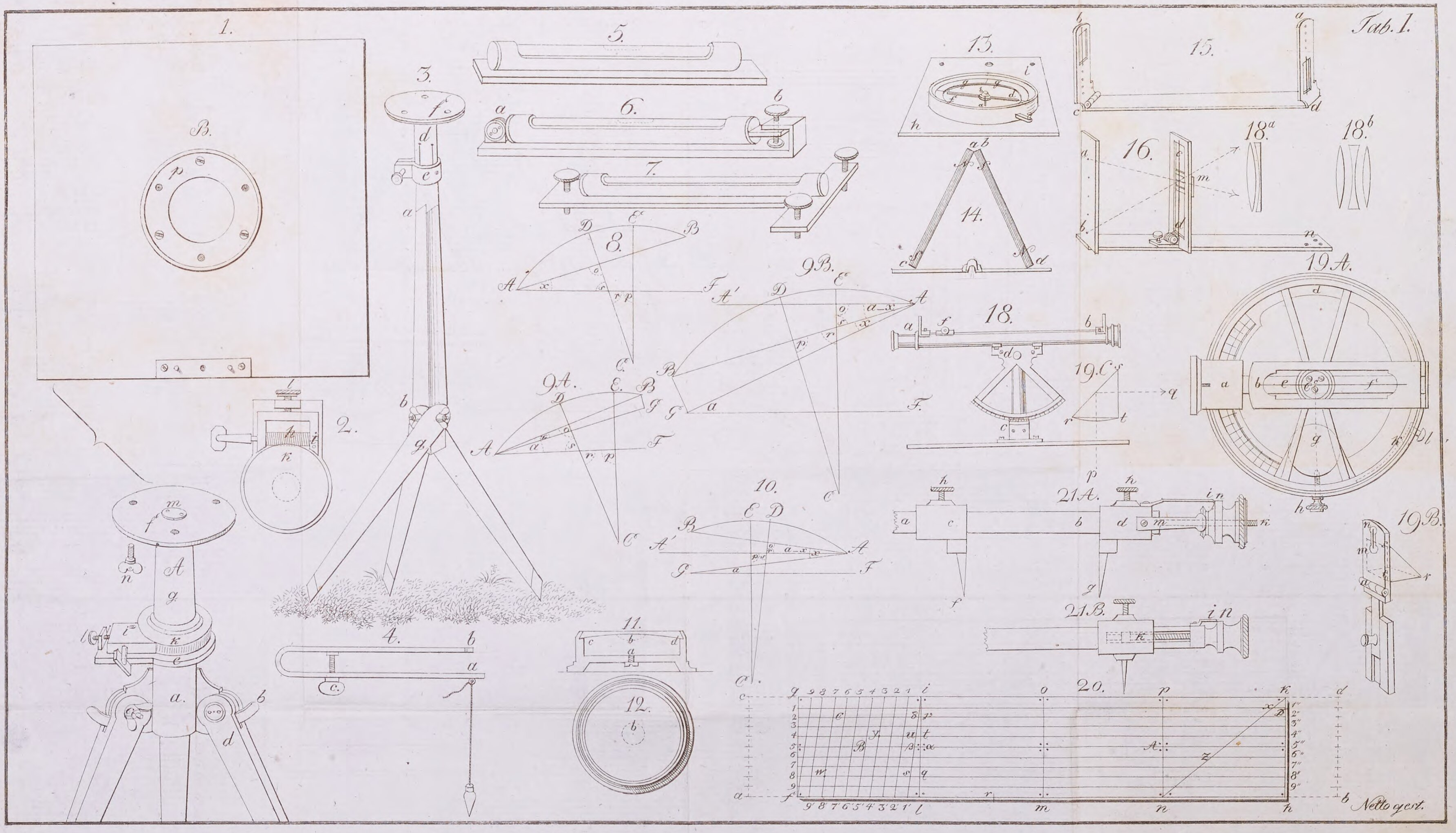
Ferner:

Berthollet, C. L., Versuch einer chemischen Statik, d. i. einer Theorie der chemischen Naturkräfte. Aus dem Franz. übersetzt von G. W. Bartoldy, und mit Erläuterungen begleitet von E. G. Fischer. 2 Theile. gr. 8. 1811. . , . 4 Rthlr. 16 Gr.

Gruson, J. P., die Kegelschnitte; elementarisch, geometrisch, algebraisch, zum Behufe der Vorlesungen abgehandelt. 8. mit 4 Kupf. 1820. 1 Rthlr. 8 Gr.

Rockstroh, H., die Logarithmen, erleichtert für den Unterricht, und in ihrer Anwendung auf ökonomische, kaufmännische, juristische u. s. w. Gegenstände. gr. 8. 1818. . . . . 18 Gr.

Bibliothek Passau


Tab. I.
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9A.
9B.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.
18.
18.a
18.b
19A.
19B.
19C.
20.
21A.
21B.
Netto gest.

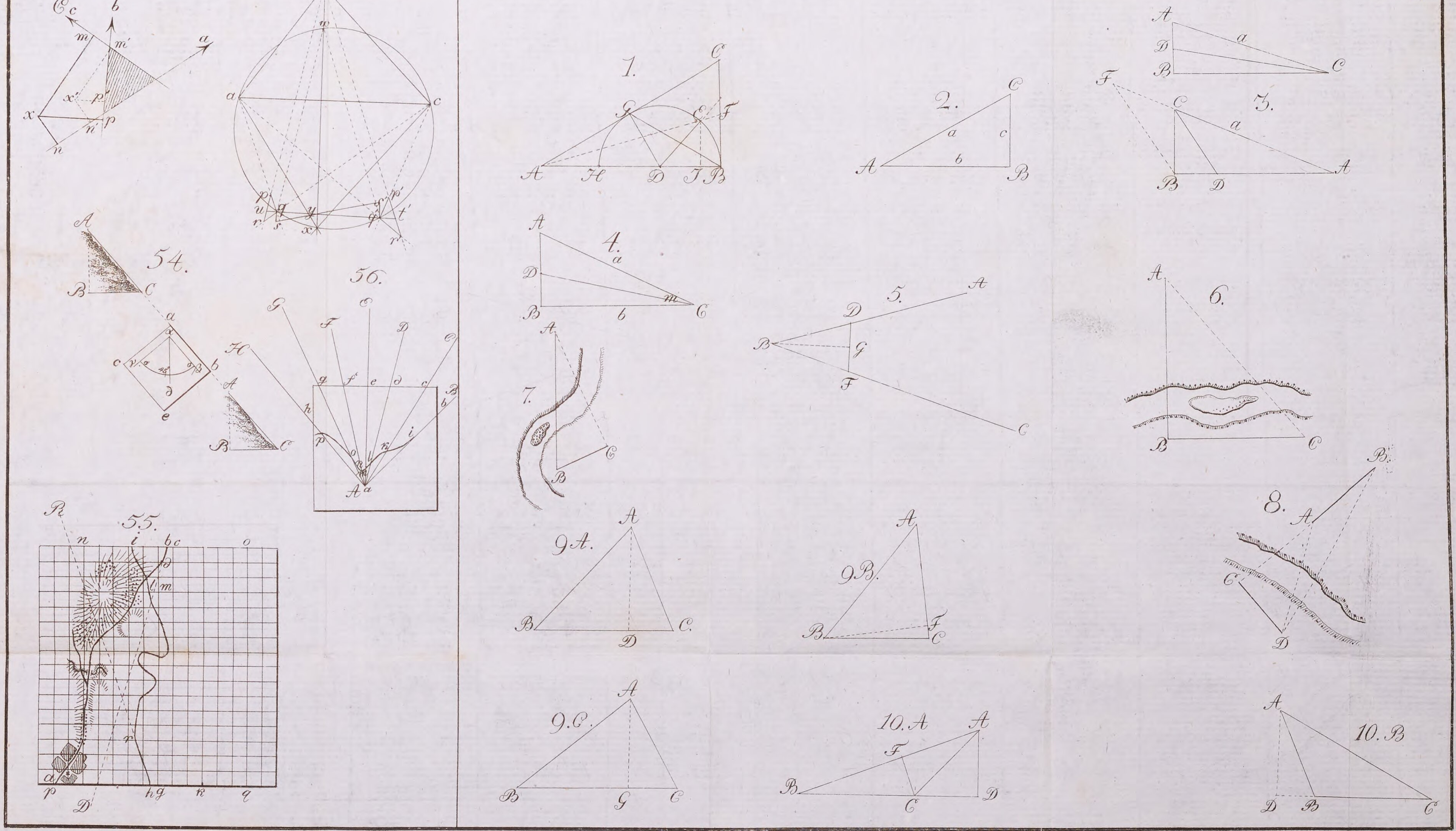
Tab. II.
22.
23.
24
25.
26
27
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36.
37.
38.
39.
40.

Tab. III.
41. A
42. A
43.
44.
45.
46.
41. B
42. B
47. Seite 166.
47. Seite 170.
48
50.
51.

Netto sc.

Trigonometrie

Tab. IV.



Staatl. Bibliothek
Passau

0

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Netto, Friedrich Wilhelm

Lehrbuch des Aufnehmens mit dem Meßtische zunächst für Preußens Militair-Unterrichts-Anstalten, überhaupt aber für Officiere, Feldmesser, Forstbediente und Bergleute, und Anleitung zur Lösung trigonometrischer Aufgaben

Berlin 1822

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 738
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346369-7